约束哈密顿系统

及其对称性质

李子平 著

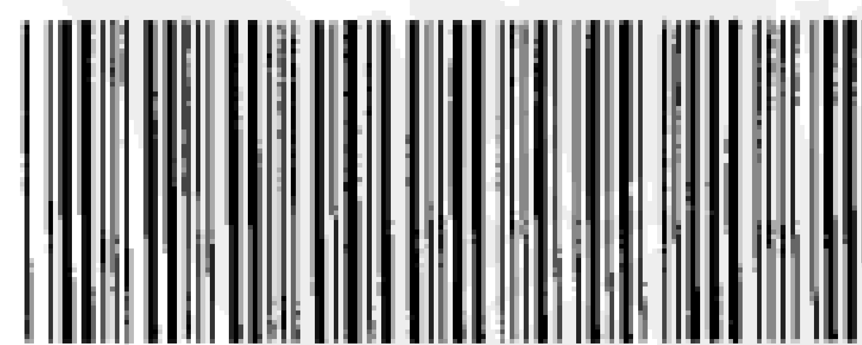
北京工业大学出版社

北京市自然科学基金资助

约束哈密顿系统及其对称性质

李子平　著





北京工业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

约束哈密顿系统及其对称性质/李子平著.-北京：北京工业大学出版社，1999.12
ISBN 7-5639-0812-9

Ⅰ.约… Ⅱ.李… Ⅲ.①约束-哈密顿方程②约束-对称-力学性质 Ⅳ.O232

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第51347号

约束哈密顿系统及其对称性质

李子平 著

*

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

1999年11月第1版 1999年11月第1次印刷

850 mm×1 168 mm 32开本 13印张 326千字

印数：1～2 000册

ISBN 7-5639-0812-9/O·33

定价：32.00元

内 容 提 要

众多的物理系统在相空间描述时，正则变量间存在约束，例如用奇异Lagrange量（包括所有规范理论）描述的系统就属于这种情形. 该系统为约束Hamilton（哈密顿）系统. 它的基本理论在现代量子场论中占重要地位.

本书主要介绍约束Hamilton系统的经典理论和量子理论，侧重于阐述其对称性. 其中包括约束系统的Dirac理论、Dirac括号量子化、Faddeev-Senjanovic路径（泛函）积分量子化，以及基于BRST对称的BFV量子化、约束Hamilton系统的经典和量子正则对称性质、量子守恒律理论等，并以杨-Mills理论和Chern-Simons理论为例作了较深入的分析.

本书不仅适合大学物理系高年级学生和研究生使用，还适合从事理论物理、数学物理、粒子物理理论、凝聚态理论以及数学、力学等相关专业的科技工作者阅读.

前　言

对动力学系统的描述有位形空间中的 Lagrange 体制和相空间中的 Hamilton 体制两种形式，后者在量子理论中有更重要的作用. 物理系统的运动往往受到某些约束条件的限制. 其约束分为两类：一类是位形空间中存在的附加条件（如力学中的完整约束和非完整约束）；另一类是相空间中描述时，正则变量间存在的关系（如相对论性运动粒子满足的质壳条件）. 众多的物理系统虽然在位形空间中不存在附加约束，但过渡到相空间描述时，正则变量间却存在约束关系，例如，旋量场 Lagrange 量描述的系统就是这种情况. 一般来说，用所谓奇异 Lagrange 量描述的系统（包括所有定域规范不变理论），过渡到相空间描述时，其正则变量间存在固有约束，即为约束 Hamilton（哈密顿）系统. 描述自然界 4 种基本相互作用的量子电动力学（QED）、量子味动力学（QFD）、量子色动力学（QCD）和引力理论（广义相对论，GR）中的 Lagrange 量均是奇异的，超对称、超引力和超弦等理论中的场都是用奇异Lagrange 量描述的系统. 由于奇异 Lagrange 系统在相空间中存在固有约束，而系统的量子化通常是由相空间的正则变量来实现的，此时初等量子力学中的量子化方法已不适用. 当正则变量间存在约束时，量子化理论中出现的新问题的研究，一直受到人们广泛的关注，特别是非 Abel 规范理论（杨-Mills 理论）的发展，仔细分析系统的约束，并在量子化过程中恰当地处理这些约束，已成为理论的中心问题之一. 因此，约束 Hamilton 系统的基本理论在现代物理学中，特

别是在量子场论中占有十分重要的地位.

奇异 Lagrange 量系统的正则形式的研究始于 Dirac, Bergmann 等人奠定了该系统的动力学和量子化的基础. 通过所谓 Dirac 括号和量子括号的对应来实现算符形式的正则量子化. 人们发现,用 Dirac 括号对杨-Mills 场进行正则量子化,处理上遇到较大困难. 对非 Abel 规范场,用路径积分量子化则是一种有效方案. Faddeev 利用 Feynman 路径积分首先实现了仅含第一类约束的系统的量子化. Senjanovic 给出了同时含第一类约束和第二类约束的系统的路径积分量子化. Faddeev-Senjanovic 量子化方案为 Faddeev-Popov 直观的路径积分量子化方法在电磁场、杨-Mills场等诸方面的应用提供了理论基础. 含 Grassmann 数系统的路径积分量子化也已给出. 相对论性协变的量子化理论是 Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV) 等人基于 BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) 对称而建立的. 其他的量子化方案,例如 Faddeev-Jackiw 方案和 Batalin-Vilkovisky 的 Lagrange 量子化方案等,也受到人们的广泛关注. 约束 Hamilton 系统的基本理论的研究已经取得了相当的进展,规范理论和引力理论量子化中的主要问题已得到解决. 然而,有关约束 Hamilton 系统理论中若干基本问题的研究在文献中仍不断有新的讨论.

对称性理论在物理学中占重要地位. 经典物理到量子理论的发展,将连续对称的研究扩充到了分立对称的研究;微观领域规律的深入探索,将整体对称的分析扩充到了定域对称的研究. 系统的整体对称性与系统存在的守恒律有密切联系;规范对称(定域不变性)制约了基本粒子的几种基本相互作用形式,并且是量子场可重整化的基础. 关于系统对称性的分析,传统的研究通常是在位形空间中讨论的(系统不含附加约束). 约束系统对称性的研究具有全新的、重要的意义. 我们曾完成了一项国家自然科学基金和两项北京市自然科学基金项目,开展了对约束 Hamilton 系统基本理论的

研究，并开创了对该系统的经典和量子正则对称性及应用的研究，在国内外先后发表了80余篇学术论文，本书就是在总结这些科研成果的基础上撰写而成的. 目前国外虽有极少数几部介绍约束Hamilton系统动力学的专著，但其中均未涉及约束Hamilton系统的正则对称性质. 本书在简明地叙述约束Hamilton系统基本理论的基础上，着重论述了该系统在相空间中的经典和量子正则对称性质，并且较系统地阐述了高阶微商奇异Lagrange量系统的正则形式的基本理论.

第一章说明了初级约束、次级约束和计算约束的Dirac-Bergmann算法以及第一类约束、第二类约束和Dirac括号的意义，讨论了有限自由度奇异Lagrange量系统的正则形式表述和约束Hamilton系统的正则方程的几种表述形式，研究了第一类约束和规范变换生成元之间的关系，给出了规范生成元的构成，说明了规范生成元中与第一类初级约束和第一类次级约束相联系的系数之间的关系，以及固定规范的问题.

第二章研究了约束Hamilton系统的经典正则对称性质，建立了相空间中整体对称下的正则形式的Noether(Nöther)第一定理，给出了相空间中对称性和守恒量的联系，建立了相空间中定域变换下的正则形式的Noether第二定理(Noether恒等式)，阐明了定域变换下不变的系统必含Dirac约束. 对于显含时间的奇异Lagrange系统，从正则形式出发建立了该系统的Poincaré-Cartan积分不变量，研究了该不变量和约束Hamilton系统的正则方程之间的关系，并特别说明了为保证约束Hamilton系统Poincaré-Cartan积分不变量存在，约束加在正则变量的变分上应满足的条件，并以正则Noether定理和Poincaré-Cartan积分不变量为工具，举例说明了Dirac猜想失效. 在这个反例中，不存在将约束作线性化处理的问题.

第三章论述了场论中奇异Lagrange量系统的经典动力学. 本

章给出了该系统在相空间描述的正则形式，将有限自由度情形的Dirac表述推广到场论中来，并以电磁场、杨-Mills场、复标量场与Chern-Simons项耦合为例，详细地分析了它们的正则形式和约束结构，给出了场论中奇异Lagrange量系统规范生成元的构造，并以有质量规范场、电磁场与旋量场耦合以及以杨-Mills场为例作了具体阐述，建立了相空间中整体对称性的正则Noether定理，导出了声子场、电子场和电磁场相互作用中的一些守恒量．本章还建立了相空间中定域变换的正则Noether恒等式，给出了在Abel规范场与荷电Bose场耦合以及非Abel规范场与物质场耦合中的应用，在某些情形下，沿着系统运动轨线，正则Noether恒等式也可导致系统的守恒量(或给出与第一类约束相联系的约束乘子的限制条件)，同时建立了场论中非定域变换的正则Noether恒等式；最后，导出了场论中奇异Lagrange量系统的Poincaré-Cartan积分不变量，讨论了该不变量与正则方程、正则变换的关系．

第四章说明了约束Hamilton系统的算符形式正则量子化，并分别对Bose变量系统和Fermi变量系统阐明了Dirac括号量子化方法，对仅含第二类约束的系统，通过Dirac括号与量子括号对应来实现系统的量子化，对同时含第一类约束和第二类约束的系统，对每一个第一类约束需选一规范条件，使系统所有约束和规范条件一起转变为第二类约束；然后，再按第二类约束系统进行量子化．本章还说明了规范条件原则上至少应满足的一些要求．书中分别以电磁场、旋量场、QED、Chern-Simons理论、自对偶场和杨-Mills场为例，详细地论述了它们的算符形式正则量子化，并指出了当场的正则变量的Dirac括号后仍含场量时(如杨-Mills场)，其量子化条件是不便于使用的，这表明Dirac括号量子化不是约束Hamilton系统量子化的最佳方案．

第五章阐述了路径积分量子化，指出了量子力学中正则算符形式量子化与路径积分量子化的等价性，相空间路径积分比位形

空间路径积分更一般，介绍了 Bose 系统的全纯表示和 Fermi 系统的 Grassmann 表示，说明了场论中的路径积分形式、Green 函数的生成泛函和正规顶角的生成泛函．在约束 Hamilton 系统的路径积分量子化中，分别讨论了仅含第一类约束系统的路径积分量子化（Faddeev 方案）以及同时含第一类约束和第二类约束系统的路径积分量子化（Senjanovic 方案），并且分别以 QED、杨-Mills 场和非 Abel Chern-Simons 理论为例，作了详细的分析；最后，说明了基于 BRST 对称的 BFV 路径积分量子化方法，并以杨-Mills 场为例作了讨论．

第六章论述了路径积分形式中的对称性，阐明了系统在整体、定域和非定域变换下，系统的量子对称性质，并分别对有限自由度系统和场论中的正规 Lagrange 量和奇异 Lagrange 量系统作了讨论．首先，从 Green 函数的相空间的生成泛函出发，建立了定域（正则变量）变换下的正则 Ward 恒等式，给出了在规范不变有质量矢量场和 QCD 中的应用，导出了 Green 函数间满足的一些关系式；然后，建立了非定域变换的正则 Ward 恒等式，讨论了在非 Abel Chern-Simons 理论中的应用，导出了正则变量整体变换下的正则 Ward 恒等式并给出了应用；最后，建立了整体正则对称性和量子守恒律相联系的理论，给出了在 π 介子与核子的赝标耦合系统、声子-电子-光子系统、杨-Mills 场论和 Chern-Simons 理论中的应用，讨论了在量子水平下的分数自旋问题，论述了位形空间中路径积分中的对称性．

第七章论述了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式、路径积分量子化以及经典和量子正则对称性质，分别对有限自由度系统（广义力学）和场论系统予以阐明．首先，从有限自由度高阶微商系统开始，介绍了从 Lagrange 体制过渡到 Hamilton 体制的 Ostrogradsky 变换；借助于约束系统的 Dirac 理论，阐述了高阶微商奇异 Lagrange 量系统广义正则方程的 3 种形式，说明了第一类

约束和规范变换生成元的关系以及规范生成元的构成，论述了该系统的经典正则对称性，建立了正则形式的 Noether 理论并给出了应用. 然后，又建立了高阶微商显含时间的奇异 Lagrange 量系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量，讨论了该不变量与广义正则方程、正则变换的关系；借助于正则形式 Noether 定理和广义 Poincaré- Cartan 积分不变量，给出了高阶微商奇异 Lagrange 量系统 Dirac 猜想的反例，论述了高阶微商场论中的奇异 Lagrange 量系统的正则对称性、规范生成元和广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 最后，论述了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的路径积分量子化，建立了该系统定域变换下的广义正则 Ward 恒等式，给出了在高阶微商有质量规范场和广义 QCD 中的应用，同时建立了该系统在整体正则对称性下的量子守恒理论，并给出了在高阶微商杨-Mills 场论和非 Abel Chern-Simons 理论中的应用.

本书在阐述约束 Hamilton 系统动力学的基本理论时，侧重于论述约束 Hamilton 系统在相空间中的经典和量子正则对称性质，并将散见在杂志文献中的资料作了较系统的归纳和整理. 由于篇幅和时间的关系，约束 Hamilton 系统理论的某些方面本书未能包括或未能充分展开表述，其中主要有约束 Hamilton 系统的现代微分几何描述、Lagrange 形式量子化以及 BRST 量子化的应用讨论不够充分等. 本书内容在研究生教学中曾多次讲授. 研究生江金环、刘赟、隆正文、李瑞洁等帮助整理和抄写了书稿，责任编辑刘津瑜女士细致校对书稿，作者对他们表示衷心地感谢. 同时，作者也深深感谢北京市自然科学基金委员会的资助和北京工业大学出版社的大力支持.

作　者

目　　录

第一章

约束 Hamilton 系统

用奇异 Lagrange 量描述的系统（包括所有规范不变系统），在相空间中描述时必存在的固有约束，为约束 Hamilton（哈密顿）系统. 这里扼要阐述了约束 Hamilton 系统的 Dirac 理论，阐明了初级约束、次级约束、第一类约束、第二类约束以及 Dirac 括号的意义，并在此基础上，讨论第一类约束与规范变换生成元的关系，说明固定规范问题.

§1-1　奇异 Lagrange 量系统

奇异 Lagrange 量系统正则形式的研究始于 Dirac[1,2]，这起源于他对动力学齐次变量的早期分析. 用奇异 Lagrange 量描述的系统，过渡到相空间用正则变量描述时，其正则变量间存在固有约束，即为约束 Hamilton 系统. 关于这方面早期的工作还有 Bergmann 等人的研究，他们阐明了约束和不变性的关系[3,4]. Dirac 和 Bergmann 等人的工作奠定了约束系统的动力学及其量子化的基础. Shanmugadhasan 分析了奇异性对 Lagrange 方程的影响，并给出了相应的 Hamilton 形式[5,6]. Kamimura 建立了 Lagrange 约束与 Hamilton 约束间的关系[7]. Sudarshan 和 Mukunda 从现代数学观点，详细讨论了 Dirac 括号的结构[8,9]. 至今已有少量著作较完整地阐述了约束系统及其量子化的基本理论[10~13]. 在这些著作中未涉及到的，乃是本书将侧重阐明的约束 Hamilton 系统的经典和量子正则对称性质.

约束 Hamilton 系统的基本理论，在理论物理中，特别是现代

量子场论（如规范场论）中占有十分重要的地位. 众多的物理系统在相空间中描述其正则变量间存在约束，例如，相对论粒子满足的“质壳”条件，电磁学和杨-Mills 场论中的 Gauss 约束，广义相对论中的超 Hamilton 量和超动量约束，弦理论中的 Virasor 条件等. 规范场理论（具有定域不变性）在描写自然界基本相互作用中占重要地位. 一切定域不变系统的 Lagrange 量均是奇异的（包括描述自然界 4 种基本相互作用的量子电动力学（QED）、量子味动力学（QFD）、量子色动力学（QCD）、引力理论（GR）等），该系统均属约束 Hamilton 系统. 约束 Hamilton 系统在相空间存在固有约束，传统的无约束情况的量子化方法不能直接用于该系统. 虽然该系统量子化中的主要问题已解决，但是有关约束 Hamilton 系统理论若干基本问题仍在文献中经常有所讨论[14]. 这里先简略介绍约束 Hamilton 系统的经典理论.

设有限自由度系统的动力学由 Lagrange 函数（或 Lagrange 量）$L=L(q^i,\dot{q}^i)$ 来描述，其中 $q^i(i=1,2,\cdots,n)$ 为广义坐标，$\dot{q}^i=\mathrm{D}q^i=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^i$ 为广义速度. 这里假设 Lagrange 函数不显含时间. 通常系统的量子化是通过相空间中的正则变量 (q^i,p_i) 来实现的. 利用 Legendre 变换，可将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述. 这里定义广义坐标 q^i 的正则共轭动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{1-1-1}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}^i-L(q,\dot{q})=p_i\dot{q}^i-L \tag{1-1-2}$$

式中 $\dot{q}^i$ 由 (1-1-1) 式中解出作为 q^i 和 p_i 的函数. 重复指示代表求和. 定义 Hess 矩阵的矩阵元

$$H_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j} \tag{1-1-3}$$

当 $\det|H_{ij}|\neq 0$ 时，根据隐函数存在定理，由(1-1-1)式可将解出所有的$\dot{q}^i$ 作为 q^i 和 p_i 的函数. Hess 矩阵非退化的($\det|H_{ij}|\neq 0$) Lagrange量称为正规 Lagrange 量.

系统的 Euler-Layranye 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=0 \tag{1-1-4}$$

(1-1-4)式又可写为

$$H_{ij}(q,\dot{q})\ \ddot{q}_j=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial q^j}\dot{q}^j \tag{1-1-5}$$

当 $\det|H_{ij}|=0$ 时，Hess 矩阵$[H_{ij}]$是退化的. 设$[H_{ij}]$的秩为常数 $R(R<n)$，由(1-1-5)式可解出 R 个 $\ddot{q}^j$，

$$\ddot{q}^j=F^j(q^1,\cdots,q^n;\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n;\ddot{q}^{R+1},\cdots,\ddot{q}^n)$$
$$(j=1,2,\cdots,R) \tag{1-1-6}$$

这 R 个二阶微分方程组中，含 $n-R$ 个任意独立的函数 $q^{R+1},\cdots,q^n$. 当给定了 $q^1(t),\cdots,q^R(t)$和$\dot{q}^1(t),\cdots,\dot{q}^R(t)$的初值后，系统动力学的解不能完全确定下来. 任意函数的不同选取，给出不同的解. 这与正规 Lagrange 量描述的系统是完全不同的. Hess 矩阵退化的 Lagrange 量称为奇异 Lagrange 量. 对于奇异 Lagrange 量系统，由 Euler-Lagrange 方程不能解出所有的 $\ddot{q}^j$，同时过渡到 Hamilton 描述时，不能由(1-1-1)式解出所有的$\dot{q}^i$.

下面讨论奇异 Lagrange 量系统的正则表述形式. 设 Hess 矩阵的秩为 R，那么，从(1-1-1)式可解出 R 个$\dot{q}^\sigma$ 作为q^i、p_α 和剩下的 $\dot{q}^\rho$ 的函数

$$\dot{q}^\sigma=f^\sigma(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho)$$
$$(\sigma,\alpha=1,2,\cdots,R;\rho=R+1,\cdots,n) \tag{1-1-7}$$

将(1-1-7)式代入(1-1-1)式，则有

$$p_i=g_i(q,\dot{q}^\sigma,\dot{q}^\rho)=g_i[q,f^\sigma(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho),\dot{q}^\rho]=$$
$$g_i(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho) \tag{1-1-8}$$

显然，当 $i=1,2,\cdots,R$ 时，(1-1-8)式为一恒等式. 当 $i=\rho$ 时，即其他 $n-R$ 个 g_ρ 将不再依赖于 $\dot{q}^\rho$. 不然的话，将会解出更多的 $\dot{q}$，与原假设矛盾. 这样就可得到坐标和动量之间的 $n-R$ 个关系式，即

$$p_\rho = g_\rho(q,p_\alpha) \quad (\rho = 1,2,\cdots,n-R) \tag{1-1-9}$$

或记为

$$\phi_a^0(q,p) = p_a - g_a(q,p_\alpha) = 0$$
$$(a = 1,2,\cdots,n-R) \tag{1-1-10}$$

(1-1-9)式或(1-1-10)式给出了正则变量的 $n-R$ 个约束关系，它们来源于正则动量的定义式(1-1-1)式，并称(1-1-10)式为初级约束. 值得注意的是，在得到初级约束时，并没有利用系统的运动方程. 由奇异 Lagrange 量描述的系统，在相空间描述时必存在固有约束，即为约束 Hamilton 系统.

考虑正则 Hamilton 量(1-1-2)式的变分

$$\delta H_c = p_i\,\delta\dot{q}^i + \dot{q}^i\delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\delta\dot{q}^i =$$
$$\dot{q}^i\delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta q^i \tag{1-1-11}$$

这里已利用了(1-1-1)式. 由(1-1-2)式，有

$$\frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}^i} = 0 \tag{1-1-12}$$

可见，按(1-1-1)、(1-1-2)式，无论是正规 Lagrange 量系统还是奇异 Lagrange 量系统，其正则 Hamilton 量均为 (q,p) 的函数. 这样，又有

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\,\delta q^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\,\delta p_i \tag{1-1-13}$$

比较(1-1-11)、(1-1-13)式可得

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\delta q^i = 0 \tag{1-1-14}$$

利用方程(1-1-4)式，有

$$\dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{1-1-15}$$

将(1-1-15)式代入(1-1-14)式中，可得

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\delta q^i = 0 \tag{1-1-16}$$

对于奇异 Lagrange 量系统，正则变量q^i 和 p_i 之间存在约束关系(1-1-10)式，因而

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \tag{1-1-17}$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)$，由(1-1-16)、(1-1-17)式，可得约束 Hamilton 系统的正则方程，即

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \tag{1-1-18a}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} \tag{1-1-18b}$$

$$\phi_a^0(q,p) = 0 \tag{1-1-18c}$$

式中 $a=1,2,\cdots,n-R$. 利用 Poisson 括号

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{1-1-19}$$

其中 F 和 G 均为 q、p 的函数. 于是(1-1-18a)、(1-1-18b)式写为

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_T\} \tag{1-1-20a}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_T\} \tag{1-1-20b}$$

式中 $H_T = H_c + \lambda^a\phi_a^0$ 称为总 Hamilton 量. 在计算(1-1-20)式的Poisson括号时，必须在先算完 Poisson 括号后，再代入约束条件.

利用(1-1-20)式、Poisson 括号，正则变量的任一函数 $F(q,p)$ 随时间的演化可写为

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i = \{F, H_T\} \tag{1-1-21}$$

约束 Hamilton 系统的正则方程又可表示为另一种形式. 利用

(1-1-7)、(1-1-9)式，可将正则 Hamilton 量写为

$$H_c = p_i \dot{q}^i - L(q,\dot{q}) =$$

$$p_\sigma \dot{q}^\sigma + p_\rho \dot{q}^\rho - L(q,\dot{q}) \qquad (1\text{-}1\text{-}22)$$

由正则动量的定义式(1-1-1)式，可知

$$\frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}^\rho} = 0$$

又

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_\sigma} = \dot{q}^\sigma + \dot{q}^\rho \frac{\partial g_\rho}{\partial p_\sigma} \qquad (1\text{-}1\text{-}23a)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{q}^\rho \frac{\partial g_\rho}{\partial q^i} \qquad (1\text{-}1\text{-}23b)$$

式中：$\sigma = 1,2,\cdots,R;\rho = R+1,\cdots,n$.

利用 Euler-Lagrange 方程(1-1-15)式，可将(1-1-23)式写为

$$\dot{q}^\sigma = \frac{\partial H_c}{\partial p_\sigma} - \dot{q}^a \frac{\partial g_a}{\partial p_\sigma} \qquad (1\text{-}1\text{-}24a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \dot{q}^a \frac{\partial g_a}{\partial q^i} \qquad (1\text{-}1\text{-}24b)$$

式中：$\sigma = 1,2,\cdots,R;a = R+1,\cdots,n$. 注意，式中未确定的任意函数 $\dot{q}^a(t)$ 相应于从正则动量定义式(1-1-1)式中未解出的那些 $\dot{q}^a(t)$.

由于约束条件(1-1-10)式的限制，正则 Hamilton 量 H_c 仅确定在整个相空间 Γ 中的一个子空间 Γ_p 中，系统的运动也是限制在子空间 Γ_p 中. 为了去掉此种限制，利用弱等概念，可将方程(1-1-24)扩充到整个相空间 Γ 中去.

设函数 $F(q,p)$ 和 $G(q,p)$ 定义在相空间 Γ 中，如果它们在约束所确定的子空间 Γ_p 上相等，那么就称 F 和 G 在 Γ 上弱等，并记为 $F \approx G$，其中"$\approx$"表示等式在 Γ_p 中成立. 如果在 Γ_p 上除 F 和 G 相等外，它们的梯度在 Γ_p 上也相等，那么就称 F 和 G 强等，并记为 $F \simeq G$. 一个弱等于 0 的函数 $F(q,p)$，$F \approx 0$，那么 F^2 必强等于 0，即 $F^2(q,p) \simeq 0$. 利用弱等概念，约束 Hamilton 系统正则方程(1-1-24)式又可写为

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \dot{q}^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \tag{1-1-25a}$$

$$\dot{p}_i \approx - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \dot{q}^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} \tag{1-1-25b}$$

事实上,(1-1-10)式可写为 $\phi_a^0 = p_a - g_a(q, p_\sigma) \approx 0$,从而有

$$\frac{\partial g_a}{\partial q^i} \approx - \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial p_\sigma} \approx - \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_\sigma}$$

$$\frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_b} \approx \delta_{ab}$$

在(1-1-24a)式中,当 $i = R+1, \cdots, n$ 时,等式自动满足.因为

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_a} = 0$$

故(1-1-24)式可化为(1-1-25)式.比较(1-1-18)式和(1-1-25)式可见,Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)$ 相应于由(1-1-1)式中未解出的 $\dot{q}^a(t)$.

§1-2 第一类约束与第二类约束

对含有初级约束(1-1-10)式的系统,系统的运动应该始终保持在由约束(1-1-10)式决定的相空间中的超曲面 Γ_p 上.约束随时间的演化应是稳定的.沿约束系统运动的轨线,其初级约束 ϕ_a^0 的时间微商应为 0.对(1-1-10)式关于时间 t 求全微商,并利用(1-1-21)式,初级约束 ϕ_a^0 应满足如下自洽性(相容性)条件:

$$\dot{\phi}_a^0 = \{\phi_a^0, H_T\} = \{\phi_a^0, H_c\} + \lambda^b \{\phi_a^0, \phi_b^0\} = 0 \tag{1-2-1}$$

(1-2-1)式可视为确定 q、p 和乘子 λ 的代数方程.(1-2-1)式可能会出现以下几种情况:

第一,得到平凡的等式;

第二，得到两端不相等的不自洽结果，这种情况的出现，表明原有的 Lagrange 量会使得 Euler-Lagrange 方程不自洽[2]；

第三，可以解出某些 Lagrange 乘子 λ^b；

第四，给出一些新的独立于(1-1-10)式的 q、p 间的约束关系.

下面分析后两种情况.

设初级约束的 Poisson 括号组成的矩阵其行列式不为 0，即

$$\det|\{\phi_a^0,\phi_b^0\}|_{\phi^0=0}\neq 0 \tag{1-2-2}$$

此时所有的乘子 λ^b 可由(1-2-1)式解出，于是(1-1-20)式中的总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}}=H_{\mathrm{c}}-\phi_a^0\{\phi_a^0,\phi_b^0\}^{-1}\{\phi_b^0,H_{\mathrm{c}}\} \tag{1-2-3}$$

式中 $\{\phi_a^0,\phi_b^0\}^{-1}$ 代表矩阵 $[\{\phi_a^0,\phi_b^0\}]$ 的逆矩阵元. 总 Hamilton 量中不再含任意函数，已被完全确定.

如果 $\det|\{\phi_a^0,\phi_b^0\}|_{\phi^0=0}=0$，则矩阵 $[\{\phi_a^0,\phi_b^0\}]$ 是奇异的. 设

$$\mathrm{rank}[\{\phi_a^0,\phi_b^0\}]|_{\phi^0=0}=k$$

$$(k<m'=n-R) \tag{1-2-4}$$

由于(1-2-1)式有 $m'-k$ 个乘子 λ^b 未确定，所以此时会产生新的约束. 事实上，在这种情形下方程

$$u_{(j)}^b\{\phi_a^0,\phi_b^0\}|_{\phi^0=0}=0 \tag{1-2-5}$$

有 $m'-k$ 个非平庸的独立解 $u_{(j)}^b(j=1,2,\cdots,m'-k)$. 用 $u_{(j)}^a$ 去乘(1-2-1)式可得

$$u_{(j)}^a\{\phi_a^0,H_{\mathrm{c}}\}=0 \tag{1-2-6}$$

如果这些关系式不恒等于 0，就表明 q、p 的某些函数应为 0，即可能出现新的约束. 将这些独立于初级约束的新约束称为次级约束. 次级约束是由初级约束的相容性条件导出的，得到次级约束时，利用了系统的运动方程(与得到初级约束情形不同). 由次级约束随时间的稳定性(次级约束的自洽性条件)又可导出新的次级约束，等等. 对有限自由度系统，这种次级约束相容性条件经过有限次步

骤后，就不再产生新的次级约束了．这时将逐次求得的次级约束函数记为

$$\phi_a^k = \{\phi_a^{k-1}, H_{\mathrm{T}}\} \quad (k = 1,2,\cdots) \tag{1-2-7}$$

直至

$$\phi_a^{m+1} = \{\phi_a^m, H_{\mathrm{T}}\} = c_{ak}^b \phi_a^k \quad (k \leqslant m) \tag{1-2-8}$$

为止．这就是 Dirac-Bergmann 求奇异 Lagrange 量系统约束的算法．

记全体独立的约束（包括初级约束 ϕ_a^0 和所有次级约束 ϕ_a^n）为

$$\psi_\alpha(q,p) \approx 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,j) \tag{1-2-9}$$

由于约束条件(1-2-9)式，系统的运动被限制在相空间中一个维数低于 Γ_{p} 的超曲面 M 上，(1-2-9)式代表 $\psi_\alpha(q,p)|_M=0$．假定所有约束对超曲面 M 是不可约的，即在 M 上为 0 的任一个 q 和 p 的函数均可表示为 ψ_α 的线性组合，其组合系数可以是 q 和 p 的函数．按照 Dirac 的处理，把表达为 q、p 函数的力学量 $F(q,p)$ 分为两类，与每个约束的 Poisson 括号都弱等于 0 的量称为第一类量，即第一类力学量 F 适合

$$\{F(q,p), \psi_\alpha\} \approx 0 \tag{1-2-10a}$$

根据约束不可约假设，$\{F, \psi_\alpha\}$ 具有

$$\{F, \psi_\alpha\} = R_{\alpha\beta}\psi_\beta \tag{1-2-10b}$$

的性质．不属于第一类的量就称为第二类量．可以证明，两个第一类量的 Poisson 括号也是第一类的[15]．按约束在 Poisson 括号下的性质，所有约束都可分为两类，一个约束同时是第一类量的称为第一类约束，即第一类约束 ψ_α 适合

$$\{\psi_\alpha, \psi_\beta\} \approx 0 \tag{1-2-11}$$

否则，称为第二类约束．

因为约束的线性组合仍然存在约束关系，因此可以证明，一个约束的任意集合存在一个等价的约束的集合．这个集合既含第一类约束又含第二类约束[12]．这样通过适当的线性组合，使尽可能多的约束归于第一类约束．对第二类约束 $\theta_i(q,p)$ 来说，有

$$\det|\{\theta_i,\theta_j\}|_M \neq 0 \tag{1-2-12}$$

的关系.事实上,假设(1-2-12)式不成立,那么方程组

$$u^i\{\theta_i,\theta_j\}|_M = 0 \tag{1-2-13}$$

就有非零解 u^i. 于是有

$$\{u^i\theta_i,\theta_j\}|_M = 0 \tag{1-2-14}$$

这时 $u^i\theta_i$ 应当属于第一类约束,与假设矛盾.

因为第二类约束之间的 Poisson 括号$\{\theta_i,\theta_j\}$是一个反对称矩阵,而非奇异反对称矩阵的阶必为偶数.因此,第二类约束的个数必为偶数.此外,根据第二类约束 θ_i 的相容性条件,则有

$$\dot{\theta}_i|_M=\{\theta_i,H_{\mathrm{T}}\}|_M=\{\theta_i,H_{\mathrm{c}}\}|_M+\lambda^j\{\theta_i,\theta_j\}|_M=0 \tag{1-2-15}$$

利用第二类约束性质(1-2-12)式,可以发现 H_{T} 中与第二类约束 θ_j 相联系的 Lagrange 乘子 λ^j 在 M 上是完全确定的.

§1-3 运动方程 Dirac 括号

将约束分为第一类约束和第二类约束,可把力学量随时间的演化(1-1-21)式化为另外的形式,亦即可将系统的运动方程写为另一种形式.通过 Dirac 括号把约束 Hamilton 系统的经典运动方程表达得更简洁.在该系统的量子化中,Dirac 括号占有重要地位.从经典理论过渡到量子理论是通过 Dirac 括号来实现的.

由约束的线性组合,使尽可能多的约束属于第一类约束.将初级第一类约束记为 $\Lambda_{a_1}\approx 0$,初级第二类约束记为 $\theta_{b_1}\approx 0$;次级第一类约束记为 $\Lambda_{a_2}\approx 0$,次级第二类约束记为 $\theta_{b_2}\approx 0$.即所有第一类约束和第二类约束分别是

$$\Lambda_a = (\Lambda_{a_1},\Lambda_{a_2}) \approx 0 \tag{1-3-1}$$

$$\theta_b = (\theta_{b_1},\theta_{b_2}) \approx 0 \tag{1-3-2}$$

这样相空间中正则变量的函数 $F(q,p)$随时间的演化方程

(1-1-21)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \{F, H_{\mathrm{T}}\} = \{F, H_{\mathrm{c}} + \lambda^a \phi_a^0\} \approx$$

$$\{F, H_{\mathrm{c}}\} + \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} + \lambda^{b_1}\{F, \theta_{b_1}\} \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

将约束的自洽性条件分别用于第一类约束和第二类约束，就有

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_a}{\mathrm{d}t} \approx \{\Lambda_a, H_{\mathrm{c}}\} \approx 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}t} \approx \{\theta_b, H_{\mathrm{c}}\} + \lambda^{b_1}\{\theta_b, \theta_{b_1}\} \approx 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}5)$$

(1-3-4)式中不含与初级第一类约束相联系的 Lagrange 乘子(约束乘子)$\lambda^{a_1}(t)$，这表明此乘子是不确定的. 未确定的乘子数目等于初级第一类约束的数目. 由(1-3-5)式可以完全确定与初级第二类约束相联系的约束乘子 $\lambda^{b_1}(t)$. 为此，以第二类约束函数的 Poisson 括号为元素构成的矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \{\theta_{b_1} \quad \theta_{b'_1}\} & \{\theta_{b_1} \quad \theta_{b_2}\} \\ \{\theta_{b_2} \quad \theta_{b_1}\} & \{\theta_{b_2} \quad \theta_{b'_2}\} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$，$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{-1}=\mathbf{1}$，用矩阵元表示，有

$$c_{bb'} c^{-1}_{b'b''} = \delta_{bb''} \qquad (1\text{-}3\text{-}7)$$

由(1-3-5)、(1-3-7)式得

$$\lambda^{b_1} \approx - c^{-1}_{b_1 b}\{\theta_b, H_{\mathrm{c}}\} \qquad (1\text{-}3\text{-}8)$$

类似地由(1-3-5)、(1-3-7)式，又可得

$$c^{-1}_{b_2 b}\{\theta_b, H_{\mathrm{c}}\} \approx 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}9)$$

将解出的 λ^{b_1} 代入(1-3-3)式，有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \{F, H_{\mathrm{c}}\} + \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} -$$

$$c^{-1}_{b_1 b'}\{\theta_{b'}, H_{\mathrm{c}}\}\{F, \theta_{b_1}\} \qquad (1\text{-}3\text{-}10)$$

(1-3-10)式还可表示为更对称的形式. 用$\{F, \theta_{b_2}\}$乘(1-3-9)式并对 b_2 求和，将所得结果加在(1-3-10)式的右端可得运动方程，即

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \{F, H_c\} + \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - c_{b'b}^{-1}\{\theta_b, H_c\}\{F, \theta_{b'}\} \tag{1-3-11}$$

可见，运动方程(1-3-11)式中出现了初级第一类约束和所有的第二类约束. 其中与初级第一类约束相联系的约束乘子 λ^{a_1}是完全不确定的.

引入 Dirac 括号，可将运动方程(1-3-11)式表示为更简洁的形式. 设 F 和 G 是正则变量的函数. F 和 G 的 Dirac 括号定义为

$$\{F, G\}_{\mathrm{D}} = \{F, G\} - \{F, \theta_i\}c_{ij}^{-1}\{\theta_j, G\} \tag{1-3-12}$$

式中：$\{\cdot,\cdot\}$代表 Poisson 括号；θ_i 为第二类约束. 利用 Dirac 括号，运动方程(1-3-11)式可写为

$$\dot{F} \approx \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} + \{F, H_c\}_{\mathrm{D}} \tag{1-3-13}$$

当 F 分别为 q^i 和 p_i 时，(1-3-13)式就给出约束 Hamilton 系统正则方程的另一种形式. 如果系统不含第一类约束，对仅含第二类约束的系统，则其运动方程为

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}_{\mathrm{D}} \tag{1-3-14}$$

Dirac 括号具有 Poisson 括号相似的性质，即

性质 1

$$\{F, G\}_{\mathrm{D}} = -\{G, F\}_{\mathrm{D}} \tag{1-3-15}$$

性质 2

$$\{F, a_1G_1 + a_2G_2\}_{\mathrm{D}} = a_1\{F, G\}_{\mathrm{D}} + a_2\{F, G_2\}_{\mathrm{D}} \quad (a_1, a_2 \text{ 为常数}) \tag{1-3-16}$$

性质 3

$$\{F, G_1G_2\}_{\mathrm{D}} = \{F, G_1\}_{\mathrm{D}}G_2 + G_1\{F, G_2\}_{\mathrm{D}} \tag{1-3-17}$$

性质 4 当不存在第二类约束时，

$$\{F, G\}_{\mathrm{D}} = \{F, G\} \tag{1-3-18}$$

性质 5

$$\{\{F_1, F_2\}_{\mathrm{D}}, F_3\}_{\mathrm{D}} + \{\{F_2, F_3\}_{\mathrm{D}}, F_1\}_{\mathrm{D}} + \{\{F_3, F_1\}_{\mathrm{D}}, F_2\}_{\mathrm{D}} = 0 \tag{1-3-19}$$

性质 6 对任一函数 $g(q, p)$，总有

$$\{g(q, p), \theta_i\}_{\mathrm{D}} = 0 \tag{1-3-20}$$

式中 θ_i 为第二类约束.

性质 7 当 $f(q,p)$ 为第一类量时,

$$\{f,g\}_{\mathrm{D}} \approx \{f,g\} \tag{1-3-21}$$

性质 8 当 $\{\theta_i\}$ 被它们的全部独立线性式 $\{\zeta_i\}$ 取代时,借助于 $\{\zeta_i\}$ 建立的 Dirac 括号与用 $\{\theta_i\}$ 定义的 Dirac 括号弱等[15].

其中性质 6 表明,在 Dirac 括号下可直接引用第二类约束,或者说,第二类约束可视为强方程.

对于显含时间的奇异 Lagrange 量 $L(t;q,\dot{q})$ 的系统,其初级约束 $\phi_a^0(t;q,p)$ 也可能显含时间 t. 其初级约束的自洽性条件

$$\frac{\mathrm{d}\phi_a^0}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial \phi_a^0}{\partial t} + \{\phi_a^0, H_c\} + \lambda^{a'}\{\phi_a^0, \phi_{a'}^0\} \approx 0 \tag{1-3-22}$$

(1-3-22)式可导致新的次级约束,次级约束的自洽性条件又可产生新的次级约束,等等. 所有约束也可分为第一类约束 $\Lambda_a \approx 0$ 和第二类约束 $\theta_b \approx 0$. 它们的自洽性条件分别为

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_a}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial \Lambda_a}{\partial t} + \{\Lambda_a, H_c\} \approx 0 \tag{1-3-23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \lambda^{b_1}\{\theta_b, \theta_{b_1}\} + \{\theta_b, H_c\} \approx 0 \tag{1-3-24}$$

在相空间中,显含时间的函数 $F(t;q,p)$ 的运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx &\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\} + \\ &\lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} + \lambda^{b_1}\{F, \theta_{b_1}\}\end{aligned} \tag{1-3-25}$$

用第二类约束函数的 Poisson 括号构成矩阵的逆矩阵元去乘(1-3-24)式,可解出 λ^{b_1},若将其代入(1-3-25)式,并将结果写为对称形式,就有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx &\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\} + \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - \\ &\{F, \theta_{b'}\}c_{b'b}^{-1}\left[\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right]\end{aligned} \tag{1-3-26}$$

显含时间的约束 Hamilton 系统的正则方程为

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^{a_1}\frac{\partial \Lambda_{a_1}}{\partial p_i} - \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial p_i}c_{b'b}^{-1}\left[\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right] \tag{1-3-27a}$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^{a_1}\frac{\partial \Lambda_{a_1}}{\partial q^i} + \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial q^i}c_{b'b}^{-1}\left[\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right] \tag{1-3-27b}$$

其中与初级第一类约束相联系的 Lagrange 乘子 λ^{a_1}是未确定的.

§1-4 第一类约束和规范变换

现考察约束的自洽性方程对 Lagrange 乘子的限制. 设系统所含的初级约束为 $\phi_a^0(q,p)\approx 0(a=1,2,\cdots,n-R)$,次级约束为 $\phi_a^n(q,p)\approx 0(\rho=1,2,\cdots,N)$,将初级约束和次级约束一起记为 $\psi_j=(\phi_a^0,\phi_a^n)$,$\psi_j(q,p)\approx 0(j=1,2,\cdots,n-R+N)$. 由约束的自洽性条件,有

$$\{\psi_j, H_c\} + \lambda^a\{\psi_j, \phi_a^0\} = 0 \tag{1-4-1}$$

在(1-4-1)式中指标 j 取那些不致于使(1-4-1)式恰为约束方程的情形,这样(1-4-1)式就是一组系数 λ^a 应满足的方程. 假设乘子 λ^a 是未知的,下面讨论这组方程的解. 方程(1-4-1)式是关于 λ^a 的非齐次线性方程,其系数是 q 和 p 的函数. 方程(1-4-1)式的通解为

$$\lambda^a = X^a(q,p) + \xi^{a'}(t)Y_{a'}^a(q,p) \tag{1-4-2}$$

式中:$X^a(q,p)$为方程组(1-4-1)式的特解;$Y_{a'}^a(q,p)$为方程(1-4-1)式对应的齐次方程组的通解,即

$$Y_{a'}^a\{\psi_j, \phi_a^0\} = 0 \tag{1-4-3}$$

(1-4-2)式中,系数 $\xi^{a'}(a'=1,2,\cdots,A'<n-R)$为时间 t 的任意函数. 系数 $\xi^{a'}$的数目通常小于系数 λ^a 的数目. 将(1-4-2)式代入总 Hamilton 量 H_T 中,可得

$$H_T = H_c + \lambda^a\phi_a^0 = H' + \xi^{a'}\phi_{a'} \tag{1-4-4}$$

式中

$$H' = H_c + X^a \phi_a^0 \tag{1-4-5}$$

$$\phi_{a'} = Y_{a'}^a \phi_a^0 \tag{1-4-6}$$

力学量 $F(q,p)$随时间演化的运动方程

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\} \tag{1-4-7}$$

可见,奇异 Lagrange 量系统的正则形式和正规 Lagrange 量系统有一个显著的不同之处,即在给定初始条件后,奇异 Lagrange 量系统的正则方程的解中出现了含时间的任意函数$\xi^{a'}(t)$.

不难证明,(1-4-4)式中的量 H'和 $\phi_{a'}$均为第一类量[2]. 其中,$\phi_{a'}$为初级约束的线性组合. 这样,总的 Hamilton 量

$$H_T = H' + \xi^{a'}\phi_{a'} \tag{1-4-8}$$

就由第一类 Hamilton 量 H'和第一类约束 $\phi_{a'}$给出. 运动方程的解中出现含时间任意函数的数目,恰好等于独立的初级第一类约束的数目,$t=0$ 时初值为 F_0 的力学量 $F(q,p)$经过 δt 时间到 t 时刻,其值为

$$\begin{aligned} F(t) = F_0 + \dot{F}\,\delta t = F_0 + \{F, H_T\}\delta t = \\ F_0 + (\{F, H'\} + \xi^{a'}\{F, \phi_{a'}\})\delta t \end{aligned} \tag{1-4-9}$$

式中系数 $\xi^{a'}$是完全任意的. 系数 $\bar{\xi}^{a'}$选取不同的值,可得到不同的 $\bar{F}(t)$,且两者之差为

$$\Delta F(t) = \delta t(\xi^{a'} - \bar{\xi}^{a'})\{F, \phi_{a'}\} = \varepsilon^{a'}\{F, \phi_{a'}\} \tag{1-4-10}$$

其中 $\varepsilon^{a'} = \delta t(\xi^{a'} - \bar{\xi}^{a'})$,即是说,选取不同的 $\bar{\xi}^{a'}$,相应于 $F(t)$和$\bar{F}(t)$之间进行了一个无穷小正则变换. 由此可见,初级第一类约束 $\phi_{a'}$是无穷小正则变换的生成元,它们导致了正则变量 q 和 p 的改变,但这种改变不影响物理态.

考虑相继进行两个正则变换,先做一个生成元 $\varepsilon^{a'}\phi_{a'}$的正则变换,然后再做一个生成元 $\omega^{a''}\phi_{a''}$的正则变换,最后得到

$$\bar{F} = F_0 + \varepsilon^{a'}\{F, \phi_{a'}\} + \omega^{a''}\{F_0 +$$

$$\varepsilon^{a'}\{F,\phi_{a'}\},\phi_{a''}\} + O(\varepsilon^2) + O(\omega^2) \tag{1-4-11}$$

将上述两个正则变换次序反过来做，则得到

$$\overline{\overline{F}} = F_0 + \omega^{a''}\{F,\phi_{a''}\} + \varepsilon^{a'}\{F_0 +$$

$$\omega^{a''}\{F,\phi_{a''}\},\phi_{a'}\} + O(\varepsilon^2) + O(\omega^2) \tag{1-4-12}$$

由(1-4-11)、(1-4-12)式之差，有

$$\Delta F = \varepsilon^{a'}\omega^{a''}(\{\{F,\phi_{a'}\},\phi_{a''}\} - \{\{F,\phi_{a''}\},\phi_{a'}\}) \tag{1-4-13}$$

利用 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式，可得

$$\Delta F = \varepsilon^{a'}\omega^{a''}\{F,\{\phi_{a'},\phi_{a''}\}\} \tag{1-4-14}$$

可见$\{\phi_{a'},\phi_{a''}\}$也可作为无穷小正则变换的生成元，它所生成的变换不影响物理态. 约束 $\phi_{a'}$是第一类的，它们的 Poisson 括号弱等于 0. 两个第一类量的 Poisson 括号也是第一类的[2]，即$\{\phi_{a'},\phi_{a''}\}$为第一类约束，此第一类约束不仅可是初级第一类约束，也可是次级第一类约束. 从(1-4-14)式可推测，所有第一类(初级和次级)约束均可作为正则变换的生成元，它们生成的变换不改变物理态. 这就是著名的 Dirac 猜想[2]. 当系统不含第二类约束时，可以证明，所有第一类约束(初级和次级)均为正则(规范)变换独立的生成元，它们产生的变换既不改变系统的状态，也不影响规范不变的量[16]

这样，规范变换的生成元一般可以写为

$$G(t;q,p) = \varepsilon^a(t)\Lambda_a(q,p) \tag{1-4-15}$$

式中：$\Lambda_a(a=1,2,\cdots,K_1)$为所有第一类约束，包括初级第一类约束和次级第一类约束；$\varepsilon^a(t)$为任意的无穷小函数.

现在回到(1-4-4)式，出现在 H_T 中的 $\phi_{a'}$为初级第一类约束，它是规范变换的生成元. 如果 Dirac 猜想成立，所有第一类约束均是规范的生成元，因而次级第一类约束 χ_A 也应加入到 Hamilton 量 H_T 中. 对于仅含第一类约束的系统，设所含的初级第一类约束

为 $\phi_a^0(a=1,2,\cdots,n-R)$，次级第一类约束为 $\chi_A(A=1,2,\cdots,B_1)$. 系统的运动方程应该由扩展 Hamilton 量

$$H_E = H' + \lambda^a \phi_a^0 + \mu^A \chi_A = H' + \lambda^\alpha \Lambda_\alpha \qquad (1\text{-}4\text{-}16)$$

导出[16]. 其中 $\lambda^a(t)$和 $\mu^A(t)$为任意 Lagrange 乘子，并记 $\lambda^\alpha=(\lambda^a,\mu^A)$. 系统的正则方程为

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_E\} \qquad (1\text{-}4\text{-}17a)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_E\} \qquad (1\text{-}4\text{-}17b)$$

对于仅含第一类约束的系统，由于$\{\phi_j, H_c\}\approx 0$，从(1-4-5)式可知 $H'=H_c$.

考虑由 H_E 决定的正则作用量

$$I_E[q,p,\lambda] = \int dt(p_i \dot{q}^i - H_E) \qquad (1\text{-}4\text{-}18)$$

在第一类约束 Λ_α 生成的变换

$$\delta q^i = \varepsilon^\alpha(t)\{q^i, \Lambda_\alpha\} \qquad (1\text{-}4\text{-}19a)$$

$$\delta p_i = \varepsilon^\alpha(t)\{p_i, \Lambda_\alpha\} \qquad (1\text{-}4\text{-}19b)$$

下，作用量 I_E 的变分在(1-4-19)式变换下，有

$$\delta(p_i \dot{q}^i) = \dot{\varepsilon}^\alpha \Lambda_\alpha + \frac{d}{dt}\left[\varepsilon^\alpha\left(\frac{\partial \Lambda_\alpha}{\partial p_i}p_i - \Lambda_\alpha\right)\right]$$

由于(1-4-5)式中的 H' 为第一类量，根据第一类约束的性质，有

$$\{H', \Lambda_\alpha\} = c_\alpha^\beta \Lambda_\beta \qquad (1\text{-}4\text{-}20)$$

$$\{\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta\} = c_{\alpha\beta}^\gamma \Lambda_\gamma \qquad (1\text{-}4\text{-}21)$$

其中 c_α^β 和 $c_{\alpha\beta}^\gamma$可以是正则变量的函数. 在(1-4-19)式变换下，有

$$\delta H_E = (\varepsilon^\alpha c_\alpha^\gamma + \lambda^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon_{\alpha\beta}^\gamma)\Lambda_\gamma + \delta\lambda^\alpha \Lambda_\alpha \qquad (1\text{-}4\text{-}22)$$

由作用量 I_E 在(1-4-19)式变换下的不变性，$\delta I_E=0$，可给出乘子的变换规则，即

$$\delta\lambda^{\alpha} = \dot{\varepsilon}^{\alpha} - \varepsilon^{\beta}c^{\alpha}_{\beta} + \lambda^{\gamma}\varepsilon^{\beta}c^{\alpha}_{\beta\gamma} \qquad (1\text{-}4\text{-}23)$$

§ 1-5 规范变换的生成元

Dirac 的广义正则形式[1,2]在广泛的物理领域中占重要地位，特别是在规范场论中其重要性尤为突出[13]. 虽然对约束系统的 Dirac 理论及其应用的研究已取得了相当的进展，但是关于该理论中的某些基本问题，一直不断有所讨论[14].

当约束 Hamilton 系统的所有第一类约束给出后，按 Dirac 的处理，这些第一类约束的线性组合可构成系统规范变换的生成元. 将其应用于杨-Mills 理论需要人为地调整线性组合的系数，使其与 Lagrange 形式的杨-Mills 势的规范变换一致[11]，这表明出现在由第一类约束线性组合而得的规范生成元中的组合系数不能是任意的. Castellani 提出了一种构造规范生成元的方法[17]，其中与第一类约束所联系的系数间的关系实际上是预先给定的. Costa 等[16]和 Saito 等[18]也讨论了该问题. Galvão 和 Boechat[19]研究了第一类约束的线性组合构造的规范生成元中，相应的组合系数之间应适合的关系. 为了得到这些基本结果，在文献[19]中仅凭一些实例人为地丢掉了其中一项，这样做的理由显然是欠充分的. 这里给出较严格的讨论.

从规范生成元所产生的规范变换后的"轨线"与变换前的"轨线"适合同样的运动方程出发，可以得到规范生成元应满足的一个充要条件，从而可求出系统规范变换的生成元.

有限自由度奇异 Lagrange 量，动力系统在相空间中的演化用正则变量(q^i, p_i)($i=1,2,\cdots,n$)来描述. 由于 Lagrange 量的奇异性，在相空间描述该系统，正则变量间存在约束. 假设所有约束均为第一类约束，系统的动力学方程由(1-1-18)式给出.

设无穷小规范变换为

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{\lambda}^a(t) &= \lambda^a(t) + \delta\lambda^a(t) \\
\bar{q}^i(t) &= q^i(t) + \delta q^i(t) \\
\bar{p}_i(t) &= p_i(t) + \delta p_i(t)
\end{aligned}\right\} \tag{1-5-1}
$$

假设变换前的“轨线”与变换后的“轨线”均满足同样的正则方程(1-1-18)式. 对变换后的“轨线”方程关于小量 δq^i、$\delta \dot{q}^i$、δp_i、$\delta \dot{p}^i$ 和 $\delta\lambda^a$ 展开,并利用方程(1-1-18)式准确到一级小量,得[20]

$$
\delta \dot{q}^i = \frac{\partial^2 H_{\mathrm{T}}}{\partial q^j \delta p_i}\delta q^j + \frac{\partial^2 H_{\mathrm{T}}}{\partial p_j \partial p_i}\delta p_j \qquad (\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{1-5-2a}
$$

$$
\delta \dot{p}_i = -\frac{\partial^2 H_{\mathrm{T}}}{\partial q^j \partial q^i}\delta q^j - \frac{\partial^2 H_{\mathrm{T}}}{\partial p_j \partial q^i}\delta p_j \qquad (\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{1-5-2b}
$$

$$
\frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{1-5-2c}
$$

其中 $\phi_a^0=0(\mathrm{mod}\ \phi_a^0)$代表在初级约束超曲面上,等式 $\phi_a^0=0$ 成立.(1-5-2)式给出了变换后“轨线”满足规范不变的充要条件.

在规范场论中,规范变换含任意函数及其微商. 考虑正则变量的变更是由相空间生成元 $G(q^i,p_i)$产生,所以 G 的一般形式为

$$
G = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{(k)}G_k = \sum_{k=0}^{m}(\mathrm{D}^{(k)}\varepsilon)G_k \tag{1-5-3}
$$

式中:$\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$;$\varepsilon^{(k)}=\mathrm{D}^{(k)}\varepsilon(t)$,其中 $\varepsilon(t)$为任意函数. 生成元 G 产生的 $q^i(t)$和 $p_i(t)$的变换为

$$
\delta q^i = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{(k)}\{q^i,G_k\} = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{(k)}\frac{\partial G_k}{\partial p_i} \tag{1-5-4a}
$$

$$
\delta p_i = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{(k)}\{p_i,G_k\} = -\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{(k)}\frac{\partial G_k}{\partial q^i} \tag{1-5-4b}
$$

将(1-5-4)式代入(1-5-2)式,由于 $\varepsilon(t)$的任意性可得

$$
\frac{\partial}{\partial p_i}(\{G_k,H_{\mathrm{T}}\} + G_{k-1}) = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{1-5-5a}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial q^i}(\{G_k,H_{\mathrm{T}}\} + G_{k-1}) = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{1-5-5b}
$$

$$\{G_k,\phi_a^0\} = 0 \qquad (\text{mod } \phi_a^0) \qquad (1\text{-}5\text{-}5c)$$

由于考虑的正则变量变分后的"轨线"仍保持在约束确定的超曲面上，在(1-5-5c)式中，对所有次级约束亦应满足$\{G_k,\phi_a^n\}=0$，其中ϕ_a^n是按 Dirac-Bergmann 算法得出的所有次级约束. 因此，G_k可取为第一类约束. 又因假设系统仅含第一类约束，在(1-5-5a)、(1-5-5b)式中H_T可用H_c代替，于是，得到的递推关系式[20]为

$$\{G_0,H_c\} = 0 \qquad (\text{mod } \phi_a^0) \qquad (1\text{-}5\text{-}6a)$$

$$G_{k-1} + \{G_k,H_c\} = 0 \qquad (\text{mod } \phi_a^0) \qquad (1\text{-}5\text{-}6b)$$

$$G_m = 0 \qquad (\text{mod } \phi_a^0) \qquad (1\text{-}5\text{-}6c)$$

递推关系(1-5-6b)式也可以从下述考虑得到，即规范变换保持约束系统的正则方程不变，规范变换的生成元G应是守恒的[18].

$$\dot{G}=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial G}{\partial t}+\{G,H_T\}=$$

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{(k)}(t)(G_{k-1}+\{G_k,H_T\})=0$$

$$(\text{mod } \phi_a^0) \qquad (1\text{-}5\text{-}7)$$

式中H_T可用H_c替代. 由于$\varepsilon(t)$的任意性，由(1-5-7)式直接可得到递推关系(1-5-6b)式.

综上所述，可见所有G_k均为第一类约束，G_{k-1}由G_k按递推关系(1-5-6b)式导出，并且G_m必为初级第一类约束. 从每一个初级第一类约束出发，由递推关系(1-5-6b)式可得到一连串的G_k，直到G_0为止. 也就是说，达到由这个递推关系所产生的约束，与H_c的 Poisson 括号在初级约束确定的超曲面上等于 0 时为止. 对每一个初级第一类约束都按上述步骤求完了所有的G_k链，按(1-5-3)式就可得到系统的规范生成元. 不过，在这个G_k链中不包含所谓χ^n-型约束[17](即将约束$\chi^n\approx 0$，线性化为$\chi\approx 0$的情况).

文献[19]中研究了由第一类约束线性组合构成规范生成元

时，其组合系数应满足某微分方程组. 为了得到该方程组，作者在文献[19]中丢掉了该文中(3-8)式左端最后一项，这是欠严格的. 这里给出了一个证明[21]. 设系统所含的独立约束为第一类的，初级第一类约束为 $\phi_k^0(k=1,2,\cdots,K_1)$，次级第一类约束为 $\chi_l(l=1,2,\cdots,L_1)$. 按 Dirac 的处理，规范生成元可表示为

$$G = \omega^l(t)\chi_l + \varepsilon^k(t)\phi_k^0 \tag{1-5-8}$$

规范变换的生成元应满足的充要条件为[22]

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H_{\mathrm{T}}\} = 0, \quad \{G, \phi_k^0\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi_k^0) \tag{1-5-9}$$

将(1-5-8)式代入(1-5-9)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\omega^l}{\mathrm{d}t}\chi_l + \omega^n\alpha_{nl}\chi_l + \varepsilon^n\beta_{nl}\chi_l = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi_k^0) \tag{1-5-10}$$

式中 α_{nl} 和 β_{nl} 适合

$$\{\chi_l, H_{\mathrm{c}}\} = \alpha_{lm}\chi_m, \{\phi_k^0, H_{\mathrm{c}}\} = \beta_{km}\chi_m \quad (\mathrm{mod}\ \phi_k^0) \tag{1-5-11}$$

由于约束 χ_l 的线性无关性，可由(1-5-10)式得到规范生成元中组合系数应满足的微分方程组，即

$$\frac{\mathrm{d}\omega^l}{\mathrm{d}t} + \omega^n\alpha_{nl} + \varepsilon^n\beta_{nl} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi_k^0) \tag{1-5-12}$$

这样就正确得到了文献[19]中的基本结果. 不难验证，按(1-5-3)、(1-5-6)式确定的生成元与按(1-5-8)、(1-5-12)式确定的生成元的结果是一致的.

§1-6 固定规范

具有第一类约束的系统随时间的演化可分为一些等价类. 同一类中任何两条"轨线"可以通过规范变换彼此联系起来. 为了刻画类空间，就必须确定类中的成员，为此通过引入一些附加条件来实现. 若仅考虑此附加条件中含有 q、p 的情况(称正则规范)，则

此附加条件可写为

$$\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(q,p) \approx 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,K_1) \tag{1-6-1}$$

通常将此附加条件称为规范条件或辅助条件.

设 $q(t)$、$p(t)$、$\lambda(t)$为类 C 中的一条“轨线”,经规范变换后的“轨线”为

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}(t) &= q(t) + \delta q(t) \\ \bar{p}(t) &= p(t) + \delta p(t) \\ \bar{\lambda}(t) &= \lambda(t) + \delta\lambda(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-6-2}$$

(1-6-2)式仍然是在类 C 中. 当每个类中的一条“轨线”满足(1-6-1)式,但

$$\Omega_\alpha(\bar{q},\bar{p}) \not\approx 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,K_1) \tag{1-6-3}$$

这时规范就完全固定了. 因此,规范的选取将破坏规范自由度. 下面进一步说明这个问题. 假使系统随时间的演化由扩展 Hamilton 量 H_{E} 决定,且 $H_{\mathrm{E}}=H'+\lambda^\alpha\Lambda_\alpha$,其中 Λ_α 为所有第一类约束函数. 系统初始时刻 $t=t_0$ 的位形处于约束所决定的超曲面 Γ_C 上,其后时刻 $t=t_1$ 系统的位形仍位于 Γ_C 上,但由于 $\lambda^\alpha(t)$的选取不同,正则变量(q,p)可以达到不同值. 这些不同的(q,p),(q',p'),(q'',p''),…,均属于同一物理态. 这样在 Γ_C 上的所有点之间就出现了一些等价类,即如果两点间可由生成元所产生的规范变换彼此联系,那么这两点就属于同一个类 C. 为了描述此相空间,可以在每个类 C 中选一个成员,通过引入进一步的约束 $\Omega_\alpha(q,p)\approx 0$ 来实现,但这个约束附加条件不是来源于系统的 Lagrange 量的性质. 为了固定 λ^α 的值,应使所选取的附加条件(或规范条件),均能将第一类约束转变为第二类约束. 于是规范条件 $\Omega_\alpha\approx 0$ 应适合

$$\det|\{\Omega_{\alpha'},\Lambda_\alpha\}| = \det|G_{\alpha\alpha'}| \neq 0 \tag{1-6-4}$$

按(1-6-4)式选取规范条件后,所有约束均化为第二类约束,从而可确定相应的 Lagrange 乘子. 规范约束的自洽性条件是

$$0 \approx \{\Omega_\alpha,H_{\mathrm{E}}\} = \{\Omega_\alpha,H'\} + \lambda^{\alpha'}\{\Omega_\alpha,\Lambda_{\alpha'}\} \tag{1-6-5}$$

根据(1-6-4)、(1-6-5)式可求出

$$\lambda^{\alpha} \approx -(G^{-1})_{\alpha\beta}\{\Omega_{\beta}, H'\} \tag{1-6-6}$$

可见，相空间中任一函数 $F(q,p)$ 随时间的演化为

$$\dot{F} \approx \{F, H_{\mathrm{E}}\} = \{F, H'\} - \{F, \Lambda_{\alpha}\}(G^{-1})_{\alpha\alpha'}\{\Omega_{\alpha'}, H'\} \tag{1-6-7}$$

设记 $G_{\alpha\alpha'} = \{\psi_{\alpha}, \psi_{\alpha'}\}$，而 $\psi_{\alpha} = (\Lambda_{\alpha}, \Omega_{\alpha})$ 为所有第一类约束和规范约束，同时注意到 Λ_{α} 的性质，则(1-6-7)式又可写为[11]

$$\dot{F} \approx \{F, H'\} - \{F, \psi_{\alpha}\}(G^{-1}_{\alpha\alpha'})\{\psi_{\alpha'}, H'\} \tag{1-6-8}$$

亦即

$$\dot{F} \approx \{F, H'\}_{\mathrm{D}} \tag{1-6-9}$$

对于仅含第一类约束的系统($H' = H_{\mathrm{c}}$)，系统的运动方程为

$$\dot{q}^{i} \approx \{q^{i}, H_{\mathrm{c}}\}_{\mathrm{D}} \tag{1-6-10a}$$

$$\dot{p}_{i} \approx \{p_{i}, H_{\mathrm{c}}\}_{\mathrm{D}} \tag{1-6-10b}$$

可见，对第一类约束引入规范条件后，其运动方程与仅含第二类约束系统的运动方程形式一样.

以上对规范条件的选取仅适用于(1-6-1)式中不含 Lagrange 乘子 $\lambda^{\alpha}(t)$ 的情形. 也就是说，排除了电磁场中协变规范和时性规范 $A^{0}=0$ 的情况(因为 A^{0} 起着 Lagrange 乘子的作用). Fradkin 及其合作者不仅对协变规范的量子化进行了一系列研究[23~25]，还对量子水平的结果与规范条件的选取无关进行了讨论.

参 考 文 献

[1] Dirac P A M. Can J Math, 1950, 2: 129

[2] Dirac P A M. Lecture on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva University, 1964

[3] Anderson J L, Bergmann P G. Phys Rev, 1951, 83: 1 018

[4] Bergmann P G, Goldberg J. Phys Rev, 1955, 98: 531

[5] Shanmugadhasan S. Proc Cambridge Phil Soc, 1955, 59: 743

[6] Shanmugadhasan S. J Math Phys, 1973, 14: 677
[7] Kamimura K. Nuovo Cimento, 1982, B68: 33
[8] Mukunda N, Sudarshan E. J Math Phys, 1968, 9: 413
[9] Sudarshan E, Mukunda N. Classical Dynamics. New York: John Wiley, 1974
[10] Hanson A, Regge T, Teitelboim C. Constrained Hamiltonian System. Rome: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976
[11] Sundermeyer K. Constrained Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1982
[12] Gitman D M, Tyutin I V. Quantization of Fields with Constraints. Berlin: Springer-Verlag, 1990
[13] Henneaux M, Teitelboim C. Quantization of Gauge System. Princeton: Princeton University Press, 1992
[14] Wang A M, Ran T N. Phys Rev, 1996, A54: 57
[15] 李子平. 经典与量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993
[16] Costa M E V, Girotti H O, Simões J J M. Phys Rev, 1985, D32: 405
[17] Castellani L. Ann Phys (N Y), 1983, 143: 357
[18] Saito Y, Sugano R, Ohta T, et al. J Math Phys, 1989, 30: 1 122
[19] Galvão C A P, Boechat J B T. J Math Phys, 1990, 31: 448
[20] Li Z P (李子平). J Phys, 1991, 24: 426
[21] 李子平. 高能物理与核物理, 1994, 17: 693
[22] Sugano R. J Math Phys, 1990, 30: 2 337
[23] Fradkin E S, Vilkovisky G A. Phys Lett, 1975, B55: 224
[24] Fradkin E S, Fradkin T E. Phys Lett, 1978, B72: 343
[25] Batalin I A, Vilkovisky G A. Phys Lett, 1977, B69: 309

第二章

正则对称性

对称性的研究在物理学中占重要地位，传统的关于系统对称性的分析是在位形空间给出的. 动力系统的量子化通常由正则变量来实现. 系统在相空间中具有的对称性的研究，在量子理论中有更基本的意义. 这里先讨论约束 Hamilton 系统的经典正则对称性. 系统在相空间中的整体对称性(不变性)，导致了正则形式的 Noether 定理；相空间中的定域不变性，导致了正则形式的 Noether 恒等式. 定域不变的系统必含 Dirac 约束，为约束 Hamilton 系统. 从分析正则作用量的变换性质出发，导出了显含时间的约束 Hamilton 系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量，阐明了该不变量与约束 Hamilton 系统正则方程的等价性，并以相空间 Noether 定理和 Poincaré-Cartan 积分不变量为工具，指出了 Dirac 猜想失效.

§2-1 整体正则对称性(正规 Lagrange 量)

众所周知，经典的 Noether 定理是在位形空间中给出的[1,2]，这个定理在分析物理系统的对称性所决定的守恒量中起着重要作用. 一个自然的问题是：将位形空间的 Lagrange 量过渡到相空间时，从相空间中系统的对称性如何确定其相应的守恒量，这里来讨论这个问题. 考虑相空间中系统的整体变换性质，可以得到相空间的 Noether 定理[3]. 它与通常基于 Lagrange 体制在位形空间中的 Noether 定理的不同特点是：分析该系统在相空间中的对称性质，可由相空间中的 Noether 定理导出其相应的守恒量，而这种相空

间的对称性质，在位形空间中往往又不明显呈现出来. 下面将举例说明这种情况. 先讨论正规 Lagrange 量系统.

现考虑相空间中的无穷小变换：

$$\left.\begin{aligned} &t \to t' = t + \Delta t = t + \varepsilon\tau(t;q,p) \\ &q^i(t) \to q^{i\prime}(t') = q^i(t) + \Delta q^i(t) = \\ &\qquad\qquad q^i(t) + \varepsilon\xi^i(t;q,p) \\ &p_i(t) \to p_i{}'(t') = p_i(t) + \Delta p_i(t) = \\ &\qquad\qquad p_i(t) + \varepsilon\eta_i(t;q,p) \end{aligned}\right\} \tag{2-1-1}$$

式中：ε 为不依赖于时间的无穷小参数；$\tau(t;q,p)$、$\xi^i(t;q,p)$和 $\eta_i(t;q,p)$为变换的生成函数，并将(2-1-1)式称为整体变换. 设在(2-1-1)式变换下，相空间中正则作用量的变更为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1'}^{t_2'} L^{\mathrm{p}\prime}(t';q',p')\mathrm{d}t' - \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{p}}(t;q,p)\mathrm{d}t = \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(t;q,p)\mathrm{d}t \tag{2-1-2}$$

式中

$$L^{\mathrm{p}}(t) = L^{\mathrm{p}}(t;q,p) = p_i\dot{q}^i - H_{\mathrm{c}}(p,q) \tag{2-1-3}$$

$$\dot{q}^i = f^i(t;q,p) \tag{2-1-4}$$

在(2-1-1)式变换下，

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = 1 + \varepsilon\dot{\tau} \tag{2-1-5}$$

由(2-1-2)、(2-1-5)式可得[4]

$$\Delta I = \int_{t_1}^{t_2}\delta L^{\mathrm{p}}(t)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L^{\mathrm{p}}(t)\Delta t]\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(t)\mathrm{d}t \tag{2-1-6}$$

式中：δ 代表等时变分；$\delta L^{\mathrm{p}}(t)$为时间 t 不发生改变时 L^{p} 的变更，即

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L^{\mathrm{p}}(t)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\delta[p_i\dot{q}^i - H_{\mathrm{c}}(t;q,p)]\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i}\right)\delta p_i + \left(p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^i - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i}\delta q^i\right)\right\}\mathrm{d}t \tag{2-1-7a}$$

式中

$$\delta q^i=\Delta q^i-\dot{q}^i\Delta t,\delta p_i=\Delta p_i-\dot{p}_i\Delta t$$

将式中的 $p_i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^i$ 项做分部积分，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L^{\mathrm{p}}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}\right)\delta q^i + \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}\right)\delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q^i)\right\}\mathrm{d}t \tag{2-1-7b}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i} = -\dot{p}_i - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i},\ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i} = \dot{q}^i - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i} \tag{2-1-8}$$

将(2-1-8)式代入(2-1-6)式，由正则方程 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta q^i=0,\delta I^{\mathrm{p}}/\delta p_i=0$，可得

$$p_i\delta q^i + L^{\mathrm{p}}(t)\Delta t - \varepsilon\Omega = \mathrm{const} \tag{2-1-9}$$

即

$$p_i\xi^i - H_{\mathrm{c}}\tau - \Omega = \mathrm{const} \tag{2-1-10}$$

于是就得到正规 Lagrange 量系统相空间中的 Noether 定理：如果在(2-1-1)式变换下，相空间中系统作用量的变更满足(2-1-2)式，那么在相空间中必存在系统的运动守恒量(2-1-10)式.

守恒量(2-1-10)式不含(2-1-1)式中的 η_i，这是因为正则共轭动量 $p_i(t)$ 是 t、$q^i(t)$ 和 $\dot{q}^i(t)$ 的函数，而

$$\Delta\dot{q}^{i\prime} = \frac{\mathrm{d}q^{i\prime}}{\mathrm{d}t'} - \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q^i + \varepsilon\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t(1+\varepsilon\dot{\tau})} - \dot{q}^i \tag{2-1-11}$$

将(2-1-11)式关于小量 ε 展开，可得

$$\Delta\dot{q}^{i\prime} = \varepsilon(\dot{\xi}^i - \dot{q}^i\dot{\tau}) \tag{2-1-12}$$

因此，由(2-1-1)、(2-1-12)式可知，t'、$q^{i\prime}$ 和 $\dot{q}^{i\prime}$ 完全由 τ 和 ξ^i 等变量

给出，从而就决定了变换后的正则共轭动量 $p_i'(t')$，也就是说，η_i 可以写为 τ 和 ξ^i 的函数.

例如：

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F(t)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{m+F(t)}q^2$$

$$(F(t) > 0) \tag{2-1-13}$$

$$H_c(p,q) = \frac{1}{2}\frac{1}{m+F(t)}(p^2 - q^2) \tag{2-1-14}$$

$$L^p = p\dot{q} - H_c(p,q) = \frac{1}{2}\frac{1}{m+F(t)}(p^2 + q^2) \tag{2-1-15}$$

在相空间中的转动变换

$$\left.\begin{aligned} p' &= p\cos\alpha - q\sin\alpha \approx p - q\delta\alpha \\ q' &= p\sin\alpha + q\cos\alpha \approx p\delta\alpha + q \end{aligned}\right\} \tag{2-1-16}$$

下，L^p 不变，此时由(2-1-10)式给出的守恒量为

$$[m + F(t)]^2\dot{q}^2 = \text{const} \tag{2-1-17}$$

从这个例子里可以看出，相空间中 L^p 在变换(2-1-16)式下的对称性，在位形空间中 L 不呈现出这种对称性，但利用相空间中的 Noether 定理可导致守恒量(2-1-17)式.

§2-2　整体正则对称性(奇异 Lagrange 量)

一个动力学系统可以用 Lagrange 体制来描述，也可以用 Hamilton 体制来描述. 对于正规 Lagrange 量系统从 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述，在相空间中正则变量之间彼此是独立的. 此时相空间中的对称性与位形空间中的对称性之间的等价性，在文献[4]中已讨论过. 但是，对于奇异 Lagrange 量系统，在相空间中正则变量之间存在固有正则约束，两体制间描述的等价性需另外讨论.

设系统的 Lagrange 量为 $L(q^i,\dot{q}^i)(i=1,2,\cdots,n)$，其 Hess 矩阵$\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\right]$的秩为 $R<n$. 利用 Legendre 变换，将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述时，在相空间中正则变量之间存在约束[5]，将其初级约束记为

$$\phi_a^0(q,p)=0 \qquad (a=1,2,\cdots,n-R) \tag{2-2-1}$$

其中 $p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}$. 此约束 Hamilton 的正则方程为

$$\dot{q}^i=\{q^i,H_{\mathrm{T}}\},\ \dot{p}_i=\{p_i,H_{\mathrm{T}}\} \tag{2-2-2}$$

式中：$H_{\mathrm{T}}=H_c+\lambda^a\phi_a^0$，其中 H_c 为正则 Hamilton 量；$\lambda^a(t)$ 为 Lagrange乘子. 系统在相空间中随时间的演化由总 Hamilton 量 H_{T} 决定.

下面分析约束 Hamilton 系统在相空间中的整体对称性质. 在一定条件下可以得到约束 Hamilton 系统在相空间的 Noether 定理[3]. 现考虑系统在相空间中的有限李群下的变换性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned}
&t\to t'=t+\Delta t=t+\varepsilon_\sigma\tau^\sigma(t;q,p)\\
&q^i(t)\to q^{i\prime}(t')=q^i(t)+\Delta q^i(t)=\\
&\qquad\qquad q^i(t)+\varepsilon_\sigma\,\xi^{i\sigma}(t;q,p)\\
&p_i(t)\to p'_i(t')=p_i(t)+\Delta p_i(t)=\\
&\qquad\qquad p_i(t)+\varepsilon_\sigma\,\eta_i^\sigma(t;p,q)
\end{aligned}\right\} \tag{2-2-3}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小参数；$\tau^\sigma(t;p,q)$、$\xi^{i\sigma}(t;q,p)$和$\eta_i^\sigma(t;q,p)$为变换(2-2-3)式的生成函数. 在有限李群下的变换 ε_σ 是与时间 t 无关的参数，(2-2-3)式为整体变换. 假设在(2-2-3)式变换下，系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{P}}=\int_{t_1}^{t_2}L^{\mathrm{P}}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left[p_i\dot{q}^i-H_c(t;q,p)\right]\mathrm{d}t \tag{2-2-4}$$

的变分为

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=\int_{t_1'}^{t_2'} L^{\mathrm{p}\prime}(t';q',p')\mathrm{d}t' - \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{p}}(t;q,p)\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(t;q,p)\mathrm{d}t \tag{2-2-5}$$

式中 $\Omega=\varepsilon_\sigma\Omega^\sigma$. 由(2-2-3)～(2-2-5)式，则有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta p_i\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i}\right)+\delta q^i\left(-\dot{p}_i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i}\right)\right]\mathrm{d}t +$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q_i+(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\Delta t]\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{2-2-6}$$

假设(2-2-1)式在(2-2-3)式所确定的等时变分下不变，即

$$\delta\phi_a^0=\frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i=0 \tag{2-2-7}$$

用 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)$乘(2-2-7)式并求和，然后在$[t_1,t_2]$上积分后与(2-2-6)式合并，可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta p_i\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i}-\lambda^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\right)+\delta q^i\left(-\dot{p}_i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i}-\lambda^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}\right)\right]\mathrm{d}t +$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\Delta t-\Omega]\mathrm{d}t=0 \tag{2-2-8}$$

沿着约束 Hamilton 系统运动的轨线，由运动方程(2-2-2)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\Delta t-\Omega]=0 \tag{2-2-9}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\Delta q^i-H_{\mathrm{c}}\Delta t-\Omega)=0 \tag{2-2-10}$$

由李群的参数 ε_σ 的独立性，(2-2-10)式又可写为

$$p_i\xi^{i\sigma}-H_{\mathrm{c}}\tau^\sigma-\Omega^\sigma=\mathrm{const}\ (\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{2-2-11}$$

这样就得到约束 Hamilton 系统在相空间中的 Noether 定理：如果在(2-2-3)式变换下，系统的正则作用量的变化适合(2-2-5)式，且

约束方程(2-2-1)式在(2-2-3)式所确定的等时变分下不变，那么该约束 Hamilton 系统在相空间中必存在 r 个守恒量(2-2-11)式.

下面考虑一个特殊情况. 例如，设系统的 Lagrange 量 L 和约束 ϕ_a^0 中均不显含时间 t，那么在时间平移下 $t'=t+\Delta t$，有$\Delta L^{\mathrm{P}}=0$和$\Delta\phi_a{}^0=0$. 于是由约束的自洽性条件，有

$$\begin{aligned}\delta\phi_a{}^0= & \frac{\partial\phi_a{}^0}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial\phi_a{}^0}{\partial p_i}\delta p_i= \\ & \frac{\partial\phi_a{}^0}{\partial q^i}\Delta q_i+\frac{\partial\phi_a{}^0}{\partial p_i}\Delta p_i-\left(\frac{\partial\phi_a{}^0}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial\phi_a{}^0}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\Delta t= \\ & -\left(\frac{\partial\phi_a{}^0}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial\phi_a{}^0}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\Delta t=-\frac{\mathrm{d}\phi_a{}^0}{\mathrm{d}t}\Delta t=0\end{aligned} \tag{2-2-12}$$

按约束 Hamilton 系统相空间中的 Noether 定理，可得系统的广义能量(Hamilton 量)守恒. 这个结果与 Lagrange 体制下的结果是一致的；反过来，如果要求此约束 Hamilton 系统的广义能量守恒与 Lagrange 体制下的结果一致，那么约束 $\phi_a^0=0$ 在时间平移下应有 $\delta\phi_a^0=0$. 由(2-2-12)式可知，约束 ϕ_a^0 随时间变化应是稳定的. 这就是约束的自洽性条件. 由此可见，为使 Lagrange 体制描述与 Hamilton 体制描述的结果相同，约束就必须适合自洽性条件.

§2-3　定域正则对称性

系统的作用量在无限连续群下的不变性，就必存在含作用量泛函导数的微分恒等式(简称为 Noether 恒等式). 此恒等式在电动力学和广义相对论[5~7,8]、流体力学[9]以及规范场论[5]等领域均有广泛的应用. 对于作用量在无限连续群下非不变系统，也导出了相应的广义 Noether 恒等式，并给出了它们在杨-Mills 场论中的应用[10,11]. 所有这些讨论均是用位形空间 Lagrange 量给出的. 这

里从系统作用量在相空间中正则变量定域变换下的不变性出发，导出了该系统在相空间中的 Noether 恒等式. 借助于 Noether 恒等式，可进一步分析系统所含的 Dirac 约束. 下面先讨论有限自由度系统.

设动力系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{p}} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}^i - H_{\mathrm{c}}(t;q,p)] \mathrm{d}t \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

式中 $H_{\mathrm{c}}(t;q,p)$ 为系统的正则 Hamilton 量. 现考虑正则作用量 I^{p} 在相空间中的无限连续群下的变换性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned} & t \to t' = t + \Delta t = t + R^{\sigma} \varepsilon_{\sigma}(t) \\ & q^i(t) \to q'^i(t') = q^i(t) + \Delta q^i = \\ & \qquad q^i(t) + S^{i\sigma} \varepsilon_{\sigma}(t) \\ & p_i(t) \to p_i'(t') = p_i(t) + \Delta p_i = \\ & \qquad p_i(t) + T_i^{\sigma} \varepsilon_{\sigma}(t) \\ & (\sigma = 1,2,\cdots,r; i = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

式中：$\varepsilon_{\sigma}(t)$ 为任意函数，并将变换(2-3-2)式称为定域变换；$R^{\sigma} = a_k^{\sigma} \mathrm{D}^k$；$S^{i\sigma} = b_l^{i\sigma} \mathrm{D}^l$；$T_i^{\sigma} = c_{im}^{\sigma} \mathrm{D}^m$ ($\mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$)，其中系数 a、b、c 等均为 t、q、p 的函数. 假设在(2-3-2)式变换下，系统正则作用量(2-3-1)式的变分适合

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int_{t'_1}^{t'_2} L^{\mathrm{p}}(t';q',p') \mathrm{d}t' - \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{p}}(t;q,p) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{D}(\Omega^{\sigma} \varepsilon_{\sigma}) \mathrm{d}t \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

式中 $\Omega^{\sigma} = e_n^{\sigma} \mathrm{D}^n$，且 e_n^{σ} 仍为 t、q、p 的函数. 由(2-3-2)、(2-3-3)式可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i} \delta p_i + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i} \delta q^i \right) \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [p_i \delta q^i + (p_i \dot{q}^i - H_{\mathrm{c}}) \Delta t - \Omega] \mathrm{d}t = 0 \quad (2\text{-}3\text{-}4)$$

式中

$$\Omega=\Omega^{\sigma}\varepsilon_{\sigma}$$

$$\delta q^{i}=\Delta q^{i}-\dot{q}^{i}\Delta t,\ \delta p_{i}=\Delta p_{i}-\dot{p}_{i}\Delta t \tag{2-3-5}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_{i}}=\dot{q}^{i}-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_{i}},\ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^{i}}=-\dot{p}_{i}-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^{i}} \tag{2-3-6}$$

将(2-3-2)、(2-3-5)式代入(2-3-4)式，可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_{i}}(T_{i}^{\sigma}-\dot{p}_{i}R^{\sigma})\varepsilon_{\sigma}+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^{i}}(S^{i\sigma}-\dot{q}^{i}R^{\sigma})\varepsilon_{\sigma}\right]\mathrm{d}t+$$
$$[p_{i}(S^{i\sigma}-\dot{q}^{i}R^{\sigma})+(p_{i}\dot{q}^{i}-H_{\mathrm{c}})R^{\sigma}-\Omega^{\sigma}]\varepsilon^{\sigma}\Big|_{t_1}^{t_2}=0 \tag{2-3-7}$$

由于 $\varepsilon_{\sigma}(t)$的任意性，所以可任意选择 $\varepsilon_{\sigma}(t)$，使得

$$\varepsilon_{\sigma}(t_1)=\dot{\varepsilon}_{\sigma}(t_1)=\cdots=\mathrm{D}^{N}\varepsilon_{\sigma}(t_1)=0$$

及

$$\varepsilon_{\sigma}(t_2)=\dot{\varepsilon}_{\sigma}(t_2)=\cdots=\mathrm{D}^{N}\varepsilon_{\sigma}(t_2)=0$$
$$(N=\max\{k,l,m,n\})$$

这样(2-3-7)式中的表面项(端点项)为 0，然后对(2-3-7)式剩下的项做分部积分，再利用 $\varepsilon_{\sigma}(t)$的端点条件和 $\varepsilon_{\sigma}(t)$的任意性，由变分学中的基本引理，可得到相空间中的 Noether 恒等式：

$$\widetilde{T}_{i}^{\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_{i}}\right)-\widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{p}_{i}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_{i}}\right)+\widetilde{S}^{i\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^{i}}\right)-\widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{q}^{i}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^{i}}\right)=0$$
$$(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{2-3-8}$$

式中 $\widetilde{R}^{\sigma}$、$\widetilde{S}^{i\sigma}$和 $\widetilde{T}_{i}^{\sigma}$ 分别为 R^{σ}、$S^{i\sigma}$和 T_{i}^{σ} 的伴随算符[10]. 例如：

$$\int_{t_1}^{t_2}fR^{\sigma}g\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}g\widetilde{R}^{\sigma}f\mathrm{d}t+[\cdot]_{t_1}^{t_2} \tag{2-3-9}$$

在导出相空间 Noether 恒等式(2-3-8)式时，并未利用系统的动力学方程. 因此，(2-3-8)式的成立与系统运动方程无关. (2-3-8)式表明，定域不变系统泛函微商 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta q^{i}$ 和 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta p_{i}$ 彼此是不独立的.

§ 2-4 不变性和 Dirac 约束

众多的物理系统是用奇异 Lagrange 量来描述的，它在相空间中存在固有约束，即为约束 Hamilton 系统. 所有定域变换下不变的 Lagrange 量，均为奇异 Lagrange 量. 例如：描述自然界基本相互作用中的量子电动力学(QED)、量子味动力学(QFD，弱电统一理论)、量子色动力学(QCD，强作用理论)和广义相对论(GR，引力理论)以及超对称、超引力和超弦理论中的 Lagrange 量均是奇异的. 约束 Hamilton 系统的经典和量子理论在现代场论中占有重要地位.

制约自然界 4 种基本相互作用(引力、电磁、弱作用、强作用)的基本规律，普遍认为是来源于理论中的规范不变性. 这种规范不变性是一种定域变换下的不变性. 在位形空间中，基于 Lagrange 体制可证明：定域变换不变的系统，必含 Dirac 约束[10]. 下面利用相空间中的 Noether 恒等式来讨论这个问题.

假设一个系统正则作用量在下列变换下不变：

$$\left.\begin{aligned} &t' = t \\ &q'^{i}(t') = q^{i}(t) + (b_0^{i\sigma} + b_1^{i\sigma}\mathrm{D})\varepsilon_\sigma(t) \\ &p'_i(t') = p_i(t) + (c_{i0}^{\sigma} + c_{i1}^{\sigma}\mathrm{D})\varepsilon_\sigma(t) \end{aligned}\right\} \tag{2-4-1}$$

式中：$\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$；系数 b、c 等均为 t、q、p 的函数. 例如杨-Mills 场中的规范变换就属于这种情况. 此时相空间中 Noether 恒等式(2-3-8)式将化为

$$c_{i0}^{\sigma}\left(\dot{q}^{i} - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right) - \mathrm{D}\left[c_{i1}\left(\dot{q}^{i} - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\right] - b_0^{i\sigma}\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^{i}}\right) + \mathrm{D}\left[b_1^{i\sigma}\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^{i}}\right)\right] = 0 \tag{2-4-2}$$

并注意到

$$\dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j \qquad (2\text{-}4\text{-}3)$$

将(2-4-3)式代入(2-4-2)式可见,q^i 的最高阶导数出现在$\mathrm{D}(b_1^{i\sigma}\dot{p}_i)$一项中,即出现在 $\mathrm{D}\left(b_1^{i\sigma}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j\right)$一项中,其中 q^i 的最高阶导数是三阶的. 由于 $q^i(t)$是任意的,因此相空间中 Noether 恒等式(2-4-2)中所有 q^i 三阶导数项之和应为 0 而与其他项无关[7],即

$$b_1^{i\sigma}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\dddot{q}^j = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}4)$$

(2-4-4)式对任意 q^i 的三阶导数均满足,于是

$$b_1^{i\sigma}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}5)$$

因为 $b_1^{i\sigma}$不全为 0(例如杨-Mills 场中的规范变换),所以由(2-4-5)式可得

$$\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right| = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}6)$$

这表明对应的 Hess 矩阵是退化的. 因此,定域不变系统必含 Dirac 约束. 也就是说,在相空间中正则变量 q 和 p 之间存在约束,即

$$\phi_j(q,p) = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,J) \qquad (2\text{-}4\text{-}7)$$

将这些约束条件与相空间中 Noether 恒等式结合,可以给出正则变量间更多的新的关系式,或者可以判明 Dirac-Bergmann 在求次级约束的过程应该终止于哪一步.

设定域不变系统所含的初级约束为 $\phi_a^0(q,p)\approx 0$,系统的运动方程为

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \qquad (2\text{-}4\text{-}8a)$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} \qquad (2\text{-}4\text{-}8b)$$

沿着约束 Hamilton 系统运动的"轨线",利用(2-4-8)式,相空间中

Noether 恒等式(2-3-8)式可化为

$$\widetilde{T}_i^{\sigma}\left(\lambda_a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\right) - \widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{p}_i \lambda_a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\right) +$$

$$\widetilde{S}^{i\sigma}\left(\lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\right) - \widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{q}^i \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\right) \approx 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}9)$$

(2-4-9)式可能为平凡的等式,或者可导致系统的守恒定律[3],或者可给出正则变量和乘子间更多的关系式.因此,相空间中 Noether 定理和 Noether 恒等式的应用,可以获得该系统 Dirac 约束和对应的 Lagrange 乘子的更多的信息.

例如:现考虑 Lagrange 量[12]

$$L(r,\theta,\xi) = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - \xi)^2] - V(r) \qquad (2\text{-}3\text{-}10)$$

在

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) \rightarrow \theta'(t) = \theta(t) + \varepsilon(t) \\ \xi(t) \rightarrow \xi'(t) = \xi(t) + \dot{\varepsilon}(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}3\text{-}11)$$

变换下,对应的作用量是不变的,其正则 Hamilton 量

$$H_c = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2r^2}p_\theta^2 + \xi p_\theta + V(r) \qquad (2\text{-}3\text{-}12)$$

在相空间中,L^P 在

$$\left.\begin{aligned} \delta r = 0,\ \delta\theta = \varepsilon(t),\ \delta\xi = \dot{\varepsilon}(t) \\ \delta p_r = 0,\ \delta p_\theta = 0,\ \delta p_\xi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}3\text{-}13)$$

局域变换下,也是不变的.由(2-3-8)式可得

$$\ddot{p}_\xi = 0 \qquad (2\text{-}3\text{-}14)$$

此奇异 Lagrange 量所描述的约束动力学系统,其初级约束为

$$\phi^0 = p_\xi \approx 0 \qquad (2\text{-}3\text{-}15)$$

由初级约束的相容性条件,可给出次级约束,即

$$\phi^1 = \dot{p}_\xi = \{p_\xi, H_T\} = p_\theta \approx 0 \qquad (2\text{-}3\text{-}16)$$

式中 $H_T = H_c + \lambda p_\xi$. 因此(2-3-14)、(2-3-16)式既表明不再存在其他导出约束，且约束 ϕ^0、ϕ^1 均为第一类约束，还表明约束超曲面上，相空间的广义 Noether 恒等式给出了广义动量 $p_\theta = r^2(\dot{\theta} - \xi)$守恒.

§2-5 约束 Hamilton 系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量

Poincaré-Cartan 积分不变量在经典力学和场论中占重要地位，它可以作为动力学的基本原理. 对正规 Lagrange 量描述的系统，该不变量与系统的正则方程等价[13,14]. Poincaré-Cartan 积分不变量已推广到非完整系统[15,16]. 奇异 Lagrange 量描述的系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量曾由 Benavent 等人给出[17,18]，而 Sugano等人讨论了该不变量在杨-Mills 场论等方面的应用[19,20]. 在文献[17,18]中是从位形空间中的作用量在变换下的变更出发，导出 Poincaré-Cartan 积分不变量的. 文献[17,18]要求约束在正则变量的总变分下不改变，这一要求是不合适的. 这里从正则形式的作用量出发，导出了约束 Hamilton 系统(奇异 Lagrange 量)的 Poincaré-Cartan 积分不变量，证明了该不变量与约束系统的正则方程等价，并指出相空间中的约束应该是在正则变量的等时变分下不变，才导致该约束系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量.

下面从正则形式的作用量出发，推导奇异 Lagrange 量系统(约束 Hamilton 系统)的 Poincaré-Carton 积分不变量. 这里讨论 Lagrange 量显含时间 t 的一般情形.

设动力学系统由奇异 Lagrange 量 $L(t;q^i,\dot{q}^i)$来描述. 由于 Lagrange 量的奇异性，所以在相空间描述时系统存在固有约束. 设

$$\Lambda_a(t;q,p) \approx 0 \qquad (a = 1,2,\cdots,A_1) \qquad (2\text{-}5\text{-}1)$$

为第一类约束；$p = p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 $q = q^1, q^2, \cdots, q^n$ 正则共轭动量，

且 $$\theta_m(t;q,p) \approx 0 \qquad (m = 1,2,\cdots,B_1) \tag{2-5-2}$$

为第二类约束；“≈”代表弱等，表示等式在约束(2-5-1)式和(2-5-2)式所决定的约束超曲面上成立. 系统的正则方程为

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i} - \frac{\partial \theta_m}{\partial p_i} c_{mm'}^{-1} \left[\{\theta_{m'}, H_c\} + \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t} \right] \tag{2-5-3a}$$

$$\dot{p}_i \approx - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i} + \frac{\partial \theta_m}{\partial q^i} c_{mm'}^{-1} \left[\{\theta_{m'}, H_c\} + \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t} \right] \tag{2-5-3b}$$

式中：$\{\cdot,\cdot\}$代表 Poisson 括号；H_c 为正则 Hamilton 量；$\lambda^a(t)$为 Lagrange 乘子.

系统的正则作用量

$$I^p = \int_{t_1}^{t_2} L^p \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}^i - H_c(t;q^i,p_i)] \mathrm{d}t \tag{2-5-4}$$

式中 $H_c(t;q^i,p_i)$为系统的正则 Hamilton 量. 现在来考察正则作用量在增广相空间中的变换性质. 设在增广相空间中取

$$\left.\begin{aligned} t &\to t' = t + \Delta t(\alpha) \\ q^i(t) &\to q^{i\prime}(t') = q^i(t) + \Delta q^i(t,\alpha) \\ p_i(t) &\to p'_i(t') = p_i(t) + \Delta p_i(t,\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{2-5-5}$$

变换. 式中 α 为参数，它适合

$$q^i(t,0) = q^i(t),\ p_i(t,0) = p_i(t) \tag{2-5-6}$$

在(2-5-5)式变换下，正则作用量 I^p 的变更

$$\Delta I^p = I^{p\prime}(\alpha)\Delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\delta I^p}{\delta q^i} \delta q^i + \frac{\delta I^p}{\delta p_i} \delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [p_i \delta q^i + (p_i \dot{q}^i - H_c) \Delta t] \right\} \mathrm{d}t \tag{2-5-7}$$

式中 δq^i 和 δp_i 为等时变分，它们与总变分 Δq^i 和 Δp_i 的关系为

$$\left.\begin{aligned}\delta q^i &= \Delta q^i - \dot{q}^i \Delta t \\ \delta p_i &= \Delta p_i - \dot{p}_i \Delta t\end{aligned}\right\} \tag{2-5-8}$$

而 I^{p} 的泛函导数分别为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i} &= -\dot{p}_i - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i} \\ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i} &= \dot{q}^i - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i}\end{aligned}\right\} \tag{2-5-9}$$

设约束方程 $\Lambda_a \approx 0$ 和 $\theta_m \approx 0$ 在(2-5-5)式所确定的等时变分下不变，即约束加在等时变分 δq^i 和 δp_i 上的条件适合

$$\delta \Lambda_a = \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i} \delta p_i \approx 0 \tag{2-5-10a}$$

$$\delta \theta_m = \frac{\partial \theta_m}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \theta_m}{\partial p_i} \delta p_i \approx 0 \tag{2-5-10b}$$

利用 Lagrange 乘子 λ^a 和 μ^m，可以得到

$$\lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i} \delta q^i + \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i} \delta p_i \approx 0 \tag{2-5-11a}$$

$$\mu^m \frac{\partial \theta_m}{\partial q^i} \delta q^i + \mu^m \frac{\partial \theta_m}{\partial p_i} \delta p_i \approx 0 \tag{2-5-11b}$$

由第二类约束 θ_m 的自洽性条件，有

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial t} + \{\theta_m, H_{\mathrm{c}}\} + \mu^{m'} \{\theta_m, \theta_{m'}\} \approx 0 \tag{2-5-12}$$

由此可得[5]

$$\mu_m \approx - c_{mm'}^{-1} \left[\{\theta_{m'}, H_{\mathrm{c}}\} + \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t} \right] \tag{2-5-13}$$

将(2-5-11)式在$[t_1, t_2]$上积分后与(2-5-7)式合并，得

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\alpha) \Delta \alpha =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i} - \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i} + \frac{\partial \theta_m}{\partial q^i} c_{mm'}^{-1} \left[\{\theta_{m'}, H_{\mathrm{c}}\} + \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t} \right] \right) \delta q^i + \right.$$

$$\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i} - \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i} + \frac{\partial \theta_m}{\partial p_i} c_{mm'}^{-1}\left[\{\theta_{m'}, H_c\} + \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t}\right]\right)\delta p_i +$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p_i \delta q^i + (p_i \dot{q}^i - H_c)\Delta t\right]\right\}\mathrm{d}t \qquad (2\text{-}5\text{-}14)$$

沿着约束系统运动的“轨线”，利用约束系统的运动方程(2-5-3)式，由(2-5-14)式可得

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\alpha)\Delta\alpha = \left[p_i \delta q^i + (p_i \dot{q}^i - H_c \Delta t)\right]_1^2 =$$

$$\left[p_i \Delta q^i - H_c \Delta t\right]_1^2 \qquad (2\text{-}5\text{-}15)$$

式中

$$\left[p_i \Delta q^i - H_c \Delta t\right]_1^2 \equiv$$

$$(p_i \Delta q^i - H_c \Delta t)_{t=t_2} - (p_i \Delta q^i - H_c \Delta t)_{t=t_1} \qquad (2\text{-}5\text{-}16)$$

在 t、q^i、p_i 所张成的增广相空间中，取一条适合所有约束条件的闭曲线 C_1，该曲线以 α 为参数来描述，并设闭曲线 C_1 的方程为

$$t = t^{(1)}(\alpha), q^i = q^i_{(1)}(\alpha), p_i = p_i^{(1)}(\alpha) \qquad (2\text{-}5\text{-}17)$$

式中 $\alpha=0$ 和 $\alpha=l$ 代表曲线 C_1 上同一点. 过 C_1 上任一点存在一条系统的运动“轨线”，过 C_1 上的每一点的“轨线”构成“轨线管”，即

$$q^i = q^i(t,\alpha),\ p_i = p_i(t,\alpha) \qquad (2\text{-}5\text{-}18)$$

式中 $q^i(t,0)=q^i(t,l)$，$p_i(t,0)=p_i(t,l)$. 取“轨线管”上另一条闭曲线 C_2，它包围“轨线管”并与“轨线管”母线仅相交一次. 设闭曲线 C_2 的方程为

$$t = t^{(2)}(\alpha), q^i = q^i_{(2)}(\alpha), p_i = p_i^{(2)}(\alpha) \qquad (2\text{-}5\text{-}19)$$

将(2-5-15)式分别沿闭曲线 C_1 和 C_2 积分，可得

$$J = \oint_{C_k} (p_i \Delta q^i - H_c \Delta t) = 不变量\ (k = 1,2) \qquad (2\text{-}5\text{-}20)$$

式中 J 称为 Poincaré-Cartan 积分. (2-5-20)式称为奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量. 它表明，在增广相空间中

所有正则约束(初级和次级)确定的超曲面 Γ_p 上,取一条闭曲线 C. 如果约束条件在(2-5-5)式所确定的等时变分下适合(2-5-10)式,那么沿着约束系统运动的“轨线”,Poincaré-Cartan 积分沿闭曲线 C 的积分为不变量.

值得指出的是,导出奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量(2-5-20)式时,要求约束在(2-5-5)式所确定的等时变分下不变是必须的. 如果按文献[17,18]中那样要求约束在(2-5-5)式变换下正则变量的总变分不变,那么

$$\Delta\Lambda_a=\frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i}\Delta q^i+\frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i}\Delta p_i=$$

$$\frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i}(\delta q^i+\dot{q}^i\Delta t)+\frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i}(\delta p_i+\dot{p}_i\Delta t)\approx 0 \quad (2\text{-}5\text{-}21)$$

$$\Delta\theta_m=\frac{\partial \theta_m}{\partial q^i}\Delta q^i+\frac{\partial \theta_m}{\partial p_i}\Delta p_i=$$

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial q^i}(\delta q^i+\dot{q}^i\Delta t)+\frac{\partial \theta_m}{\partial p_i}(\delta p_i+\dot{p}_i\Delta t)\approx 0 \quad (2\text{-}5\text{-}22)$$

利用 Lagrange 乘子 λ^a 和 μ^m,由(2-5-7)、(2-5-21)、(2-5-22)式沿着约束系统运动的“轨线”,可得

$$(p_i\Delta q^i-H_c\Delta t)\big|_1^2=$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[\lambda^a\left(\frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\mu^m\left(\frac{\partial \theta_m}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial \theta_m}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\right]\Delta t\mathrm{d}t=$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[c_{mm'}^{-1}\left(\{\theta_{m'},H_c\}+\frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta_m}{\partial q^i}\dot{q}^i-\frac{\partial \theta_m}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)-\right.$$

$$\left.\lambda^a\left(\frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\right]\Delta t\,\mathrm{d}t \quad (2\text{-}5\text{-}23)$$

利用约束的自洽性条件,可得

$$[p_i \Delta q^i - H_c \Delta t]_1^2 =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial t} - c_{mm'}^{-1} \left(\{\theta_{m'}, H_c\} + \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_m}{\partial t} \right] \Delta t \, \mathrm{d}t \quad (2\text{-}5\text{-}24)$$

因此，从(2-5-24)式一般是不能导出奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量的. 由此可见，要求约束条件在变换(2-5-5)式的正则变量的总变分下不变，来推导奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量是不妥的；而应该修改为要求约束在变换(2-5-5)式所确定的正则变量的等时变分下不变，才能正确得到奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量. 这样，就澄清了文献[17,18]中出现的混淆，他们的结果在约束不显含时间 t 或变换(2-5-5)式中 $\Delta t=0$ 才是正确的.

§2-6 约束 Hamilton 系统的正则方程和 Poincaré-Cartan积分不变量

从正则形式作用量和约束方程出发，可以较方便地导出奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量. 下面反过来，研究其逆命题，即从约束 Hamilton 系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量出发导出该系统的正则方程. 假设一个动力学系统满足以下条件：

(1)系统在相空间中存在约束

$$\Lambda_a(t; q^i, p_i) \approx 0 \quad (a = 1, 2, \cdots, A_1) \qquad (2\text{-}6\text{-}1)$$

$$\theta_m(t; q^i, p_i) \approx 0 \quad (m = 1, 2, \cdots, B_1) \qquad (2\text{-}6\text{-}2)$$

式中：Λ_a 为第一类约束；θ_m 为第二类约束. 约束决定的相空间中的超曲面随时间是稳定的.

(2)在相空间中系统的动力学“轨线”由一组微分方程，即

$$\dot{q}^i \approx f^i(t; q^i, p_i, u_a), \dot{p}_i \approx g_i(t; q^i, p_i, u_a)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2\text{-}6\text{-}3)$$

确定. 式中 $u_a(t)$为任意函数.

(3)存在函数 H_c,且具有

$$\frac{\partial \Lambda_a}{\partial t} + \{\Lambda_a, H_c\} \approx 0 \tag{2-6-4}$$

的性质.

(4)Poincaré-Cartan 积分(2-5-20)式,在方程组(2-6-3)式的解所确定的“轨线管”上沿包围“轨线管”的闭曲线的积分为不变量. 由此可以证明,系统的运动方程必为正则方程,即 H_c 和 f^i、g_i 之间满足下列关系:

$$\dot{q}^i \approx f^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + u_a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i} - \frac{\partial \theta_m}{\partial p_i} c^{-1}_{mm'} \left[\{\theta_{m'}, H_c\} + \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t} \right] \tag{2-6-5}$$

$$\dot{p}_i \approx g_i \approx - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} - u_a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i} + \frac{\partial \theta_m}{\partial q^i} c^{-1}_{mm'} \left[\{\theta_{m'}, H_c\} + \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t} \right] \tag{2-6-6}$$

式中

$$c^{-1}_{mm'} \{\theta_{m'}, \theta_{m''}\} = \delta_{mm''} \tag{2-6-7}$$

事实上,引入一个辅助参量 μ,在方程组(2-6-3)式中添加一个方程,即[13]

$$\frac{\mathrm{d}q^1}{f^1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}q^n}{f^n} = \frac{\mathrm{d}p_1}{g_1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}p_n}{g_n} = \mathrm{d}t = \pi \mathrm{d}\mu \tag{2-6-8}$$

式中 π 为增广相空间中的任意函数. 对每一给定的 u_a,将方程组(2-6-3)式积分,可得

$$\left.\begin{aligned} q^i &= q^i(\mu; q^i_0, p^0_i, t_0) \\ p_i &= p_i(\mu; q^i_0, p^0_i, t_0) \\ t &= t(\mu; q^i_0, p^0_i, t_0) \end{aligned}\right\} \tag{2-6-9}$$

这里 q^i_0、p^0_i、t_0 为初值,它们对应于 $\mu=0$,且位于由约束(2-6-1)、(2-6-2)式所确定的超曲面 Γ_p 中. 为了得到动力学“轨线”(2-6-9)式确定的“轨线管”,可取初值点在一闭曲线上,该曲线位于 Γ_p 中,

并用 α 参数来表征. 也就是说，应当将(2-6-9)式中的 q_0^i、p_i^0、t_0 代之以 $q_0^i(\alpha)$、$p_i^0(\alpha)$、$t_0(\alpha)$. 这样，便可得到组成给定管子的那些"轨线管"的参数方程，即

$$q^i = q^i(\mu,\alpha),\ p_i = p_i(\mu,\alpha),\ t = t(\mu,\alpha)$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant l) \tag{2-6-10}$$

对于一个给定的 α 值它相应于一确定的"轨线管母线"，而参数 μ 的值则决定了这条"母线"上的一定点. 令 $\mu=\text{const}$，方程(2-6-10)式确定了"轨线管"上的一条闭曲线 C. 当 Poincaré-Cartan 积分(2-5-20)式中的 q^i、p_i、t 已用(2-6-10)式代入，沿闭曲线 C 的积分便得 J 为参数 μ 的函数，即 $J=J(\mu)$.

根据积分 J 的不变性，有

$$\mathrm{d}J = 0 \tag{2-6-11}$$

式中字母 d 表示对参数 μ 的微分. 用字母 Δ 表示对 α 的微分，在积分号下取微分，得

$$\mathrm{d}J = \oint_C (\mathrm{d}p_i \Delta q^i + p_i \mathrm{d}\Delta q^i - \mathrm{d}H_c \Delta t - H_c \mathrm{d}\Delta t) = 0 \tag{2-6-12}$$

将(2-6-12)式中 $\mathrm{d}\Delta q^i$ 和 $\mathrm{d}\Delta t$ 分别改写为 $\Delta\mathrm{d}q^i$ 和 $\Delta\mathrm{d}t$(因运算 d 和运算 Δ 是对不同的独立变量 μ 和 α 取微分，因此它们彼此可交换)，并沿闭曲线 C 分部积分，则得

$$\oint_C (\mathrm{d}p_i \Delta q^i - \Delta p_i \mathrm{d}q^i - \mathrm{d}H_c \Delta t + \Delta H_c \mathrm{d}t) =$$

$$\oint_C \left[\left(\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\mathrm{d}t\right)\Delta q^i + \left(-\mathrm{d}q^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\mathrm{d}t\right)\Delta p_i + \right.$$

$$\left.\left(-\mathrm{d}H_c + \frac{\partial H_c}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\Delta t\right] \tag{2-6-13}$$

由(2-6-3)式，将(2-6-13)式逐项除以 $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}t/\pi$，可得

$$\oint_C \left[\left(g_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\Delta q^i + \left(-f^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\Delta p_i + \right.$$

$$\left(-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H_c}{\partial t}\right)\Delta t\Big]\pi=0 \tag{2-6-14}$$

因为 π 是一任意因子，因而可得

$$\left(g_i+\frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\Delta q^i+\left(-f^i+\frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\Delta p_i+$$

$$\left(-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H_c}{\partial t}\right)\Delta t=0 \tag{2-6-15}$$

由于约束条件(2-6-1)、(2-6-2)式，所以正则变量的变分是不独立的. 假设由 Δq^i 和 Δp_i 决定的等时变分 δq^i 和 δp_i 分别适合如下条件：

$$\frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i}\delta p_i\approx 0 \tag{2-6-16}$$

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial \theta_m}{\partial p_i}\delta p_i\approx 0 \tag{2-6-17}$$

利用 Lagrange 乘子 u^a 和 λ^m，由(2-6-15)、(2-6-16)、(2-6-17)式，可得

$$\dot{q}^i\approx f^i\approx\frac{\partial H_c}{\partial p_i}+u^a\frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i}+\lambda^m\frac{\partial \theta_m}{\partial p_i} \tag{2-6-18}$$

$$\dot{p}_i\approx g_i\approx-\frac{\partial H_c}{\partial q^i}-u^a\frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i}-\lambda^m\frac{\partial \theta_m}{\partial q^i} \tag{2-6-19}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial t}\approx\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}+u^a\left(\frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\lambda^m\left(\frac{\partial \theta_m}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial \theta_m}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\approx$$

$$\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}+u^a\{\Lambda_a,H_c\}+\lambda^m\{\theta_m,H_c\} \tag{2-6-20}$$

(2-6-18)、(2-6-19)式为约束 Hamilton 系统的运动方程. 而(2-6-20)式为运动方程的直接推论，因为

$$\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H_c}{\partial t}+\frac{\partial H_c}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial H_c}{\partial p_i}\dot{p}_i\approx$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial t}+\frac{\partial H_c}{\partial q^i}\left(\frac{\partial H_c}{\partial p_i}+u^a\frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i}+\lambda^m\frac{\partial \theta_m}{\partial p_i}\right)+$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H_c}{\partial q^i}-u^a\frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i}-\lambda^m\frac{\partial \theta_m}{\partial q^i}\right)=$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial t}+u^a\{H_c,\Lambda_a\}+\lambda^m\{H_c,\theta_m\} \tag{2-6-21}$$

由假设(1),约束确定的超曲面是稳定的.第二类约束 θ_m 随时间的稳定性(自洽性条件),可求出乘子 λ^m,即

$$\lambda^m=-c_{mm'}^{-1}\left[\{\theta_{m'},H_c\}+\frac{\partial \theta_{m'}}{\partial t}\right] \tag{2-6-22}$$

根据(2-6-4)式,对第一类约束 Λ_a 的自洽性条件已自动满足.将(2-6-22)式代入(2-6-18)、(2-6-19)式,就可得到(2-6-5)、(2-6-6)式.可见,对相空间中含任意函数的一阶运动微分方程,Poincaré-Cartan 积分在动力学"轨线管"上闭曲线 C 的积分为不变量时,该运动方程必为正则方程的形式.其任意函数的数目等于第一类约束的数目.

由约束的自洽性条件,并注意 Poisson 括号 $\{\varphi_a,\varphi_b\}$ 关于指标 a、b 反对称,(2-6-21)式又可写为

$$\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\partial H_c}{\partial t}+u^a\frac{\partial \Lambda_a}{\partial t}+\lambda^m\frac{\partial \theta_m}{\partial t} \tag{2-6-23}$$

当约束不显含时间 t 时,或对于正规 Lagrange 量系统才有 $\frac{\partial H_c}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}$ 的结果.一般情况下,它们之间的关系应适合(2-6-23)式.如果按文献[17,18]那样,要求约束在正则变量的全变分下不变,来推导约束 Hamilton 系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量,得到的

是 $\frac{\partial H_c}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}$，这个结果一般是不成立的．文献[18]讨论正则变换时涉及到约束显含时间的情况．在此正确区别正则变量的总变分和定时变分，可澄清文献[17，18]出现的混淆．在推导正规Lagrange量系统的Poincaré-Cartan积分不变量时，其正则变量的变分不受任何限制；而在导出奇异 Lagrang 量系统的 Poincaré-Cartan积分不变量时，其正则变量的变分要受约束条件的限制．只有当它们的等时变分适合(2-6-16)、(2-6-17)式时，才能正确导出奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量．在讨论非完整系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量时，也出现类似情况[15]．

根据奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量，可以得到该约束 Hamilton 系统的正则方程．其中出现在 Hamilton 量中的约束为所有第一类约束，而不仅仅是初级第一类约束，此时已无法区分初级第一类约束和次级第一类约束．

上述 Poincaré-Cartan 积分不变量可以作为研究 Dirac 猜想的有用工具．前面推导 Poincaré-Cartan 积分不变量时，我们利用了总 Hamilton 量 H_T 所决定的正则方程，其中仅考虑了初级约束 ϕ_a^0．假设 Dirac 猜想成立，如果系统仅含第一类约束，那么系统随时间的演化是由扩展 Hamilton 量 H_E 所决定，且 $H_E=H_c+\lambda^a\phi_a^0+\mu^b\chi_b$．式中 χ_b 是所有次级第一类约束，系统的正则方程由 H_E 给出．如果初级第一类约束满足(2-5-10a)式条件，次级第一类约束也满足(2-5-10a)式条件，那么从 H_E 所决定的正则方程出发，同样也可导出 Poincaré-Cartan 积分不变量(2-5-20)式．由此得出结论：对约束 Hamilton 系统，由 H_E 给出的方程为正则方程的充分必要条件是该系统存在 Poincaré-Cartan 积分不变量．利用 Poincaré-Cartan 积分不变量导致的正则方程(2-6-18)、(2-6-19)式中，包含了所有第一类约束，此时已无法区分初级第一类约束和次级第一类约束．这表明，对约束 Hamilton 系统，存在 Poincaré-

Cartan 积分不变量与 Dirac 猜想有效，二者是等价的. 在正规 Lagrange 量的 Poincaré-Cartan 积分不变量中，其正则变量的变分是任意的. 而奇异 Lagrange 量系统存在 Poincaré-Cartan 积分不变量，其正则变量的变分要受到约束条件的限制，即约束条件在正则变量的等时变分下不变. 因此，对约束 Hamilton 系统，Poincaré-Cartan 积分不变量是否存在并且所有由 H_E 决定的正则方程能否由 Poincaré-Cartan 积分不变量导出，可以作为 Dirac 猜想是否有效的一个判别准则. 如果在给定情形中，Poincaré-Cartan 积分不变量不存在，或者该不变量虽然存在，但由 H_E 确定的所有正则方程不能完全由该 Poincaré-Cartan 积分不变量导出，那么在此情形中 Dirac 猜想失效.

§2-7 Dirac 猜想

约束系统的 Dirac 理论在现代量子场论中占重要地位. 应用这个理论，规范场和引力场等非线性场论量子化中出现的中心问题已基本解决. 这个理论不仅适用于 C-数系统(Bose 场)，而且还可以推广到 Grassmann 数系统(Fermi 场). 然而，尽管约束系统的 Dirac 理论有了相当的发展，但是这个理论中的若干基本问题至今仍在不断地讨论，其中之一就是 Dirac 猜想. 如前所述，在约束 Hamilton 系统的正则形式中，Dirac 曾猜想，所有第一类约束(初级的和次级的)均是规范变换独立生成元，它们生成物理态间的等价变换. 如果这个猜想成立，那么一个具有初级第一类约束 $\phi_k^0\approx 0$ $(k=1,2,\cdots,K_1)$和次级第一类约束 $\chi_m\approx 0(m=1,2,\cdots,M_1)$的系统，其运动方程应该由 H_E 导出，

$$H_E = H_c + \lambda^k \phi_k^0 + \mu^m \chi_m \qquad (2\text{-}7\text{-}1)$$

式中 λ^k 和 μ^m 分别为 Lagrange 乘子. 长期以来，对 Dirac 猜想一直有争议[21~32]，一些反例也已给出[33~36]. 其中一些人指出，正确区

分运动方程解的规范变换和相空间中点的规范变换，有可能澄清 Dirac 猜想的有效性[37]. 所有这些争议均是基于考察由 H_E 导出的运动方程不严格等价于对应的 Lagrange 方程. 近来，对已给出的若干反例，重新做了讨论[38~40]，并指出 Cawley 等人的反例不是真正的反例[38]，因为他们采用了将约束线性化的步骤，从而导致了强等和弱等概念的混淆. 因为 $\chi\approx0$ 必有 $\chi^2\simeq0$，故 $\chi^2\approx0$ 不能简单地认为 $\chi\approx0$.

基于约束 Hamilton 系统在相空间中的对称性质，并考察由扩展 Hamilton 量经由正则形式的 Noether 第一定理导致的守恒量是否等价于 Lagrange 体制下经由位形空间中 Noether 第一定理导致的守恒量，我们给出了新的反例[3,30,41~43]，说明 Dirac 猜想失效，而此时并未将约束线性化.

下列给出的反例中不存在将约束线性化的问题[41]. 现考虑 Lagrange 量

$$L=\dot{x}\dot{z}+xz-y\dot{z} \tag{2-7-2}$$

相应的 Lagrange 方程为 $\ddot{z}-z=0, \dot{z}=0, \ddot{x}-x-\dot{y}=0$. 可见，$z=0$，$y$ 任意，y 与 x 的关系由第三个方程给出，Lagrange 量 (2-7-2)式在

$$x'=\rho x,\ y'=\rho y,\ z'=\rho^{-1}z \tag{2-7-3}$$

变换下不变. 式中 ρ 为参数. 由经典 Noether 定理可得守恒量

$$\dot{z}x-(\dot{x}-y)z=\text{const} \tag{2-7-4}$$

现在转到相空间来分析，坐标 x、y、z 相应的正则动量为

$$p_x=\dot{z},\ p_y=0,\ p_z=\dot{x}-y$$

正则 Hamilton 量

$$H_c=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L=p_xp_z+yp_x-xz \tag{2-7-5}$$

初级约束为 $\phi^0=p_y\approx0$；总 Hamilton 量 $H_T=H_c+\lambda\phi^0$，其中 λ 为 Lagrange 乘子. 初级约束的自洽性条件 $\{\phi^0,H_T\}=0$，给出次级约束 $\phi^1\approx p_x\approx0$；次级约束 ϕ^1 的自洽性条件，给出另一次级约束 $\phi^2=$

$z\approx 0$. 所有约束(ϕ^0,ϕ^1,ϕ^2)均是第一类的. 扩展 Hamilton 量

$$H_E = H_c + \lambda\phi^0 + \mu_1\phi^1 + \mu_2\phi^2 = H_T + \mu_1\phi^1 + \mu_2\phi^2 \tag{2-7-6}$$

式中 μ_1 和 μ_2 为另外的 Lagrange 乘子. 正则 Lagrange 量

$$L^p = \dot{q}^i p_i - H_c = p_x p_z + xz$$

和初级约束 ϕ^0 在下列相空间中的变换下不变:

$$\left.\begin{aligned} x' = \rho x,\ y' = \rho y,\ z' = \rho^{-1} z \\ p_x' = \rho^{-1} p_x,\ p_z' = \rho p_z \end{aligned}\right\} \tag{2-7-7}$$

由正则形式的 Noether 定理((2-2-11)式)可得守恒量

$$p_x x - p_z z = \text{const} \tag{2-7-8}$$

此结果与(2-7-4)式相同. 如果系统的正则运动方程是由 H_E 导出,那么必须考虑到所有次级约束,并要求所有次级约束 $\phi^1\approx 0$, $\phi^2\approx 0$也在(2-7-7)式变换下不变,才能由正则 Noether 定理导出守恒量(2-7-8)式,然而,次级约束不能满足此要求. 为了使 Lagrange 体制描述与 Hamilton 体制描述的结果一致,因此在相空间中系统的动力学演化不是由 H_E 决定,而是由 H_T 决定. 这表明,Dirac 猜想在这个例子中失效. 这里不存在任何约束被线性化的问题.

这个问题也可以根据约束 Hamilton 系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量来说明. 如果此系统的正则方程是由 H_E 决定的,系统存在相应的 Poincaré-Cartan 积分不变量,这就要求所有约束条件在正则变量的等时变分下不变,此要求对于次级约束,就应有 $\delta z\approx 0$. 由于对正则变量的这个限制,与 H_E 相应的 Poincaré-Cartan 积分不变量就不存在. 也就是说,由 Poincaré-Cartan 积分不变量不能导出由 H_E 确定的所有正则方程. 这就违反了 Poincaré-Cartan 积分不变量与 H_E 确定的正则方程间的等价性. 可见, Dirac 猜想在这个例子中失效[44].

尽管如此,对一些有重要物理意义的系统(例如电磁场、杨-

Mills 场等)，尚未发现 Dirac 猜想导致不合理的结果. 文献[42]中，按 Dirac 和 Bergmann 的物理思想，将约束系统的 Dirac-Bergmann 理论推广到更一般的奇异 Lagrange 量系统，其结果适用于系统 Hess 矩阵具有变量秩的情形以及系统第一类约束的最小演化封闭 Poisson 括号含固有子代数的情形，提出了所谓扩展 Dirac 猜想. 但文中分析 Cawley 反例时，仍采纳了约束线性化的步骤.

参考文献

[1] Nöther E. Nachr Akad Wiss Math Phys, 1918, 2: 235

[2] Logan J D. Invariant Variational Principles. New York: Academic Press, 1977

[3] Li Z P (李子平), Li X. Int J Theor Phys, 1991, 30: 225

[4] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993

[5] Sundermyer K. Constrained Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1982

[6] Hilbert D. Math Ann, 1924, 92: 1

[7] Bergmann P G. Phys Rev, 1949, 75: 680

[8] Anderson J L, Bergmann P G. Phys Rev, 1951, 83: 1018

[9] Drobot S, Rybarski A. Arch Rat Mech Anal, 1958, 2: 293

[10] Li Z P (李子平). Int J Theor Phys, 1987, 26: 853

[11] 李子平. 高能物理与核物理, 1988, 12: 782

[12] Christ H, Lee T D. Phys Rev, 1980, D22: 939

[13] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991

[14] Gantmacher F. Lecture in Analytical Mechanics. Moscow: Mir, 1970

[15] Li Z P (李子平), Li X. Int J Theor Phys, 1990, 29: 765

[16] Li Z P (李子平), Wu B C. Int J Theor Phys, 1994, 33: 1063

[17] Benavent F, Gomis J. Ann Phys (N Y), 1980, 21: 2124

[18] Dominic D, Gomis J. J Math Phys, 1980, 21: 2124
[19] Sugano R, Kamo H. Prog Theor Phys, 1982, 69: 1966
[20] Sugano R. Prog Theor Phys, 1982, 68: 1377
[21] Costa M E V, Girotti H O, Sim õɛs J J M. Phys Rev, 1985, D32: 405
[22] Castellani L. Ann Phys (N Y), 1983, 143: 357
[23] Saito Y, Sugano R, Ohta T, et al. J Math Phys, 1989, 30: 1122
[24] Galv ão C A P, Boechat J B T. J Math Phys, 1990, 31: 448
[25] Gatay M. J Phys, 1983, A16: L143
[26] Stefano R D. Phys Rev, 1983, D27: 1752
[27] Appleby D M. J Phys, 1982, A15: 1191
[28] Sugano R, Kimura R. J Phys, 1983, A16: 1417
[29] Cabo A. J Phys, 1986, A19: 629
[30] Li Z P (李子平). Europhys Lett, 1993, 21: 141
[31] LI Z P (李子平). Phys Rev, 1994, E52: 876
[32] Gogilidze S A, Sanadze V V, Tkebuchava F G, et al. J Phys, 1994, A 27: 6509
[33] Allock G R. Phil Trans Roy Soc, 1975, A279: 485
[34] Cawley R. Phys Rev Lett, 1979, 42: 413
[35] Cawley R. Phys Rev, 1980, D21: 2988
[36] Frenkel A. Phys Rev, 1980, D21: 2986
[37] Grácia X. Pons J M. Ann Phys (N Y), 1988, 187: 355
[38] Qi Z. Int J Theor Phys, 1990, 29: 1309
[39] 戚智，李子平．北京工业大学学报，1992，18：68
[40] Wang A M, Ruan T N. Phys Rev, 1996, A54: 57
[41] Li Z P (李子平). Chinese Phys Lett, 1993, 10: 68
[42] Li Z P (李子平). J Phys, 1991, A24: 4261
[43] 李子平. 物理学报，1992，41：710
[44] Wu B C. Int J Theor Phys, 1994, 33: 1557

第三章

场论中的正则约束

本章研究场论中的奇异 Lagrange 量系统，该系统在相空间中存在固有的正则约束为约束 Hamilton 系统. 首先，讨论场论中奇异 Lagrange 量系统的正则形式描述，分别以电磁场、杨-Mills 场和 Chern-Simons理论为例作较详细的阐明；其次，研究场论中约束 Hamilton 系统的经典正则对称性质，讨论该系统规范变换生成元的构成，建立相空间中整体对称的正则 Noether 定理，并给出在声子-电子-光子系统中的应用，建立相空间中定域和非定域变换下的正则 Noether 恒等式，同时给出它们在 Abel 和非 Abel 规范场论中的应用；最后，讨论了场论中奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量，以及该不变量与约束 Hamilton 系统正则方程和正则变换的关系.

§3-1 场论中奇异 Lagrange 量系统的正则形式

在场论中描写场运动的场量 $\varphi^{\alpha}(x)(x=(t,\boldsymbol{x}),\alpha=1,2,\cdots,n)$ 可能是多分量(例如电磁场的场量 $A_{\mu}(x)$ 就有 4 个分量). 这里 α 代表场的张量、旋量、同位旋或幺旋等分量或不同场量的指标. 平坦时空度规 $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1\ -1\ -1\ -1)$. 设描述场的 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu})$ 不显含时空坐标，其中 $\varphi^{\alpha}_{,\mu}=\partial_{\mu}\varphi^{\alpha}=\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}\varphi^{\alpha}$. 场的 Lagrange 量

$$L[\varphi^{\alpha},\dot{\varphi}^{\alpha}]=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x\mathscr{L}(\varphi^{\alpha}(x),\varphi^{\alpha}_{,\mu}(x))\tag{3-1-1}$$

用 Legendre 变换引入场的正则动量

$$\pi_a = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}^a}$$

并定义场的正则 Hamilton 量

$$H_c[\varphi^a, \pi_a] = \int_V \mathrm{d}^3x \mathscr{H}_c = \int_V \mathrm{d}^3x[\pi_a(x)\dot{\varphi}^a(x) - \mathscr{L}(x)] \quad (3\text{-}1\text{-}2)$$

式中 $\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量密度. 于是可将对场的 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述. 系统 Lagrange 量的 Hess 矩阵

$$[H_{\alpha\beta}] = \left[\frac{\delta^2 L}{\delta\dot{\varphi}^\alpha \delta\dot{\varphi}^\beta}\right]$$

当 $\det|H_{\alpha\beta}| \neq 0$ 时, 称 Lagrange 量是正规的, 而当

$$\det|H_{\alpha\beta}| = \det\left|\frac{\delta^2 L}{\delta\dot{\varphi}^\alpha \delta\dot{\varphi}^\beta}\right| = \det\left|\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^\alpha \partial\dot{\varphi}^\beta}\right| = 0 \quad (3\text{-}1\text{-}3)$$

时, 称 Lagrange 量是奇异的. 此时由正则动量的定义, 不能全部解出 $\dot{\varphi}^a(x)$ 作为 $\varphi^a(x)$ 和 $\pi_a(x)$ 的函数. 设 Hess 矩阵 $[H_{\alpha\beta}]$ 的秩为 R, 则正则变量间存在 $n-R$ 个约束条件, 即

$$\phi_a^0(\varphi^\alpha, \pi_\alpha, \varphi^\alpha_{,i}, \pi_{\alpha,i}) \approx 0 \quad (a = 1,2,\cdots,n-R) \quad (3\text{-}1\text{-}4\text{a})$$

并称这些约束为初级约束. 此时约束中不仅含正则变量, 而且还可能含正则变量的空间微商. 一般来说, 约束方程不是代数方程, 而是微分方程. 场论中约束 $\phi_a^0 \approx 0$, ϕ_a^0 的空间微商和对空间变量的积分仍是弱等于 0 的. 此外, 对每一空间点都有约束条件(3-1-4a)式, 在这个意义上说(3-1-4a)式代表 $3(n-R)$ 重连续无限多的约束条件. 在有限自由度系统中的求和在场论中则相应于积分. 为简单起见, 将(3-1-4a)式写为

$$\phi_a^0(\varphi^\alpha, \pi_\alpha) \approx 0 \quad (a = 1,2,\cdots,n-R) \quad (3\text{-}1\text{-}4\text{b})$$

考虑在正则变量 φ^α 和 π_α 变分下, 正则 Hamilton 量(3-1-2)式的变更, 有

$$\delta H_c = \int_V \mathrm{d}^3 x \left[\dot{\varphi}^\alpha \delta\pi_\alpha + \pi_\alpha \delta\dot{\varphi}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \varphi^\alpha} \delta\varphi^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^\alpha} \delta\dot{\varphi}^\alpha \right] \tag{3-1-5a}$$

由正则动量 π_α 的定义(3-1-5a)式又可写为

$$\delta H_c = \int_V \mathrm{d}^3 x \left[\dot{\varphi}^\alpha \delta\pi_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \varphi^\alpha} \delta\varphi^\alpha \right] \tag{3-1-5b}$$

利用 Euler-Lagrange 方程可得

$$\delta H_c = \int_V \mathrm{d}^3 x (\dot{\varphi}^\alpha \delta\pi_\alpha - \dot{\pi}_\alpha \delta\varphi^\alpha) \tag{3-1-6}$$

可见,无论是正规 Lagrange 量或奇异 Lagrange 量,δH_c 仅为正则变量及其变分的泛函.

另一方面,有

$$\delta H_c = \int_V \mathrm{d}^3 x \left(\frac{\delta H_c}{\delta\pi_\alpha} \delta\pi_\alpha + \frac{\delta H_c}{\delta \varphi^\alpha} \delta\varphi^\alpha \right) \tag{3-1-7}$$

由(3-1-6)、(3-1-7)式可得

$$\int_V \mathrm{d}^3 x \left[\left(\dot{\varphi}^\alpha - \frac{\delta H_c}{\delta\pi_\alpha} \right) \delta\pi_\alpha + \left(-\dot{\pi}_\alpha - \frac{\delta H_c}{\delta\varphi^\alpha} \right) \delta\varphi^\alpha \right] = 0 \tag{3-1-8}$$

对于奇异 Lagrange 量系统,在相空间中存在约束(3-1-4b)式,因而正则变量彼此不独立,而有

$$\frac{\partial \phi_a^0}{\partial \pi_\alpha} \delta\pi_\alpha + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial \varphi^\alpha} \delta\varphi^\alpha = 0 \tag{3-1-9}$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t, \boldsymbol{x})$ 乘(3-1-9)式后,在空间区域 V 上积分,将所得结果与(3-1-8)式合并,可选 $n-R$ 个 Lagrange 乘子 $\lambda^a(x)$,使其适合

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi}^\alpha - \frac{\delta H_c}{\delta\pi_\alpha} - \frac{\delta H_1}{\delta\pi_\alpha} &= 0 \\ -\dot{\pi}_\alpha - \frac{\delta H_c}{\delta\varphi^\alpha} - \frac{\delta H_1}{\delta\varphi^\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-1-10a}$$

式中 $H_1 = \int \mathrm{d}^3 x \lambda^a \phi_a^0$,而剩下的 R 个方程 $\delta\varphi^\alpha$、$\delta\pi_\alpha$ 为独立变量,从

而它们的系数也应满足(3-1-10a)式.这样,就可得到约束 Hamilton 系统的正则方程,即

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}^{\alpha} &= \frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta \pi_{\alpha}} = \{\varphi^{\alpha}, H_{\mathrm{T}}\} \\ \dot{\pi}_{\alpha} &= -\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta \varphi^{\alpha}} = \{\pi_{\alpha}, H_{\mathrm{T}}\}\end{aligned}\right\} \tag{3-1-10b}$$

式中:H_{T} 为总 Hamilton 量,

$$H_{\mathrm{T}} = H_{\mathrm{c}} + H_{1} = \int_{V} \mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}} + \lambda^{a}\phi_{a}^{0}) \tag{3-1-11}$$

$\lambda^{a}(x)$ 为 Lagrange 乘子;$\{\cdot,\cdot\}$ 代表场的 Poisson 括号. 设 A、B 分别为 φ^{α}、π_{α} 及其空间微商的泛函,那么

$$\{A,B\} = \int_{V} \mathrm{d}^{3}x'' \left\{ \frac{\delta A}{\delta \varphi^{\alpha}(t,\boldsymbol{x}'')} \frac{\delta B}{\delta \pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}'')} - \frac{\delta A}{\delta \pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}'')} \frac{\delta B}{\delta \varphi^{\alpha}(t,\boldsymbol{x}'')} \right\} \tag{3-1-12}$$

例如:正则变量间的基本 Poisson 括号为

$$\{\varphi^{\alpha}(t,\boldsymbol{x}), \pi_{\beta}(t,\boldsymbol{x}')\} = \int_{V} \mathrm{d}^{3}x'' \left\{ \frac{\delta \varphi^{\alpha}(t,\boldsymbol{x})}{\delta \varphi^{\gamma}(t,\boldsymbol{x}'')} \frac{\delta \pi_{\beta}(t,\boldsymbol{x}')}{\delta \pi_{\gamma}(t,\boldsymbol{x}'')} \right\} = \int_{V} \mathrm{d}^{3}x''\, \delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\gamma}\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'')\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'') = \delta_{\beta}^{\alpha}\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{3-1-13}$$

$$\{\varphi^{\alpha}(t,\boldsymbol{x}), \varphi^{\beta}(t,\boldsymbol{x}')\} = 0 \tag{3-1-14}$$

$$\{\pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}), \pi_{\beta}(t,\boldsymbol{x}')\} = 0 \tag{3-1-15}$$

由(3-1-10)式相空间的函数 $F(\varphi^{\alpha},\pi_{\alpha})$ 随时间的演化为

$$\dot{F} = \{F, H_{\mathrm{T}}\} \tag{3-1-16}$$

将初级约束和运动方程(3-1-16)式结合,由初级约束随时间的稳定性(自洽性条件),可给出次级约束;由次级约束的自洽性条件,可逐次给出其他次级约束,即

$$\phi_{a}^{k} = \{\phi_{a}^{k-1}, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0 \quad (k = 1,2,\cdots,m) \tag{3-1-17}$$

直至 ϕ_{a}^{m} 适合

$$\phi_a^{m+1} = \{\phi_a^m, H_{\mathrm{T}}\} = c_{ak}^b \phi_b^k \quad (k \leqslant m) \qquad (3\text{-}1\text{-}18)$$

这就是场论中求约束的 Dirac-Bergmann 算法.

与有限自由度的情况相似,可以定义第一类量和第二类量.一个与所有约束构成的 Poisson 括号都弱等于 0 的量称为第一类的,否则称为第二类的.如果既是一个约束又是第一类量就称为第一类约束,否则称为第二类约束.当全部初级和次级约束的某些线性组合能够变成第一类,则用独立的线性组合来代替它们,使尽可能多的约束归到第一类.和有限自由度情形不同的是,在有限自由度情形下,第一类约束可用代数的组合得到,而在场论情形可能出现约束和约束的空间微商的线性组合转变为第一类约束.

设系统所有第一类约束为 $\{\Lambda_a(x)\}$,第二类约束为 $\{\theta_i(x)\}$.出现在动力学方程式中与第一类约束 $\Lambda_a(x)$ 相应的 Lagrange 乘子是任意的,而第二类约束 $\theta_i(x)$ 的自洽性条件则给出

$$\{\theta_i(x), H_c(t)\} + \int_V \mathrm{d}^3y\ \lambda^j(y)\{\theta_i(x), \theta_j(y)\} \approx 0 \qquad (3\text{-}1\text{-}19)$$

定义矩阵元

$$c_{ij}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{\theta_i(x), \theta_j(y)\}_{x^0 = y^0} \qquad (3\text{-}1\text{-}20)$$

则方程组(3-1-19)式变为

$$\{\theta_i(t, \boldsymbol{x}), H_c(t)\} + \int_V \mathrm{d}^3y\ c_{ij}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\lambda^j(t, \boldsymbol{y}) \approx 0 \qquad (3\text{-}1\text{-}21)$$

由方程组(3-1-21)式求解 $\lambda_i(x) = \lambda_i(t, \boldsymbol{x})$ 的问题归结为求矩阵 $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$.设 $\boldsymbol{C}^{-1}$的矩阵元为 $c_{ij}^{-1}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,则

$$\int \mathrm{d}^3z\ c_{ij}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})c_{jj'}^{-1}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}') = \delta_{jj'}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad (3\text{-}1\text{-}22)$$

与有限自由度不同的是,在场论中约束 $\theta_i(x)$ 之间的 Poisson 括号和 $\{\theta_i(x), H_c\}$ 一般可表示为 δ-函数及其微商等项的和,例如:

$$c_{ij}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a_{ij}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + b_{ij}^k \partial_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \text{高阶微商项} \qquad (3\text{-}1\text{-}23)$$

式中系数函数的具体形式在这里无关紧要.仅当(3-1-23)式中无

δ-函数的微商项出现时，(3-1-19)式才是代数关系；否则，(3-1-19)式将给出 $\lambda_i(t,\boldsymbol{x})$ 的微分方程组，此时 Lagrange 乘子不能由方程完全固定[1]，需要给出合适的边界条件才能确定 $\lambda_i(t,\boldsymbol{x})$[2]. 在场论中分部积分出现的表面项常常被丢掉，对于约束系统这样做必须十分谨慎. 在广义相对论中[3]，杨-Mills 理论[4,5]和有质量 Schwinger 模型中对表面项的作用已进行了讨论. 在经典理论中，对 Lagrange 量添加一个四维散度项对运动方程无影响，但量子化后的结果是否会改变，对奇异 Lagrange 量系统仍然是一个不清楚的问题[6,7].

类似地，利用 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵也可定义 Dirac 括号. 设 $A(t,\boldsymbol{x})$ 和 $B(t,\boldsymbol{x})$ 是由 $\varphi^{\alpha}(t,\boldsymbol{x})$、$\pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})$ 及其空间微商构成的泛函，它们之间的 Dirac 括号定义为

$$\{A(t,\boldsymbol{x}),B(t,\boldsymbol{x}')\}_{\mathrm{D}} = \{A(t,\boldsymbol{x}),B(t,\boldsymbol{x}')\} - \int_V \mathrm{d}^3y\,\mathrm{d}^3z\{A(t,\boldsymbol{x}),\theta_i(t,\boldsymbol{y})\}\cdot c_{ij}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\{\theta_j(t,\boldsymbol{z}),B(t,\boldsymbol{x}')\} \tag{3-1-24}$$

这样定义的 Dirac 括号与有限自由度系统 Dirac 括号有若干相同性质. 特别值得注意的是，设 $F(t,\boldsymbol{x})$ 是由 $\varphi^{\alpha}(t,\boldsymbol{x})$、$\pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})$ 及其空间微商构成的量，则

$$\{F(t,\boldsymbol{x}),\theta_j(t,\boldsymbol{x}')\}_{\mathrm{D}} = 0 \tag{3-1-25}$$

即在 Dirac 括号下可以把第二类约束条件视为强方程. 当 F 是第一类量时，F 与 G 之间的 Dirac 括号弱等于通常的 Poisson 括号.

从前面的讨论可以看出：有限自由度系统过渡到场论时，相应于普通微商改为泛函微商，即

$$\frac{\partial W}{\partial u} \to \frac{\delta W}{\delta u(x)} \tag{3-1-26}$$

$$\delta W = \int \frac{\delta W}{\delta u}\delta u(x)\mathrm{d}^k x \tag{3-1-27}$$

(关于泛函微商，可参见文献[1]中的附录 D.)

§ 3-2 电磁场

自由电磁场(无源电磁场)的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \tag{3-2-1}$$

式中：$F_{\mu\nu}$为势 $A_\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$ 确定的二级反对称场强张量；$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$. 其中 $A^0=\varphi$ 为标势；$\boldsymbol{A}$ 为矢势. 自由电磁场的 Euler-Lagrange 方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{3-2-2}$$

下面讨论自由电磁场的正则形式表述. 这里将 $x^0=t$ 作为动力学演化参数. 由于 $\partial\mathscr{L}/\partial A_{\nu,\mu}=-F^{\mu\nu}$，于是

$$H^{\nu\lambda} = \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial A_{\nu,\mu}\partial A_{\lambda,\mu}} = g^{\mu\nu}g^{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda}g^{\mu\mu} \tag{3-2-3}$$

此处对 μ 不求和. 由(3-2-3)式可得 Hess 矩阵，即

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-2-4}$$

它是奇异的. 场 A_μ 的共轭动量

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -F^{0\mu} \tag{3-2-5}$$

所以初级约束为

$$\pi^0(x) \approx 0 \tag{3-2-6}$$

利用(3-2-5)式，电磁场的 Lagrange 量密度可写为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \tag{3-2-7}$$

其正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \pi_i \dot{A}_i - \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \tag{3-2-8}$$

式中的 $\dot{A}_i$ 可表示为

$$\dot{A}_i = \partial_0 A_i = F_{0i} + \partial_i A_0 = \pi_i + \partial_i A_0 \tag{3-2-9}$$

将(3-2-9)式代入(3-2-8)式，可得

$$\mathscr{H}_c = \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \pi_i\partial_i A_0 + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \tag{3-2-10}$$

正则 Hamilton 量 $H_c = \int_V d^3x \mathscr{H}_c$，分部积分后略去表面项后，得

$$H_c = \int d^3x\left(\frac{1}{2}\pi_i\pi_i - A_0\partial_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik}\right) \tag{3-2-11}$$

由(3-2-6)式，总 Hamilton 量

$$H_T = H_c + \int d^3x\lambda(x)\pi^0(x) \tag{3-2-12}$$

以 A_μ、π^μ 为正则变量的基本 Poisson 括号为

$$\{A_\mu(x),\pi^\nu(y)\}_{x^0=y^0} = \delta^\nu_\mu\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3-2-13a}$$

$$\{A_\mu(x),A_\nu(y)\}_{x^0=y^0} = \{\pi^\mu(x),\pi^\nu(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{3-2-13b}$$

由初级约束的自洽性条件有

$$\{\pi^0,H_T\} = -\left\{\pi^0,\int d^3x A_0\partial_i\pi_i\right\} = \partial_i\pi_i \approx 0 \tag{3-2-14}$$

从而所得的次级约束

$$\phi^1 = \partial_i\pi_i \approx 0 \tag{3-2-15}$$

(3-2-15)式恰好是 Gauss(高斯)定律. 次级约束(3-2-15)式的自洽性条件，不导致其他新的约束.

由(3-2-13)式计算约束之间的 Poisson 括号，可得

$$\{\pi^0(x),\pi^0(y)\}_{x^0=y^0} \approx 0 \tag{3-2-16a}$$

$$\{\pi^0(x),\partial_{iy}\pi_i(y)\}_{x^0=y^0} = \partial_{iy}\{\pi^0(x),\pi_i(y)\}_{x^0=y^0} \approx 0 \tag{3-2-16b}$$

$$\{\partial_{ix}\pi_i(x),\partial_{iy}\pi_i(y)\}_{x^0=y^0} \approx 0 \tag{3-2-16c}$$

这表明所有约束都是第一类的. 不难验证, H_c 与每一个约束的 Poisson 括号均弱等于 0, 因此 H_c 也是第一类量.

在自由电磁场的正则形式表述中, 含两个 $2\times\infty^3$ 约束, 即 $\phi^0=\pi^0\approx 0$(初级约束)和 $\phi^1=\partial_i\pi_i\approx 0$(次级约束), 它们均是第一类约束. 其扩展 Hamilton 量

$$H_E = H_c + \int d^3x[\lambda(x)\phi^0(x) + \mu(x)\phi^1(x)] =$$

$$\int d^3x\left[\frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} + \lambda\pi^0 + (\mu - A_0)\partial_i\pi_i\right] \quad (3\text{-}2\text{-}17)$$

由 H_E 导出的正则方程分别为

$$\dot{A}_\mu(x) \approx \{A_\mu(x), H_E\} \quad (3\text{-}2\text{-}18a)$$

$$\dot{\pi}^\mu(x) \approx \{\pi^\mu(x), H_E\} \quad (3\text{-}2\text{-}18b)$$

$$\pi^0 \approx 0 \quad (3\text{-}2\text{-}18c)$$

$$\partial_i\pi_i \approx 0 \quad (3\text{-}2\text{-}18d)$$

§3-3 非 Abel 规范场

量子电动力学(QED)具有 Abel 群 $U(1)$ 定域规范不变性, 将定域规范不变性推广到非 Abel 规范群, 首先是杨振宁和 Mills 给出的[8], 该不变性要求引入了新的非 Abel 规范场(或杨-Mills 场). 非 Abel 规范场理论的主要进展是在自发破缺规范理论建立之后, 特别是粒子物理中弱电统一理论(量子味动力学, QFD)和强相互作用的量子色动力学(QCD)所取得的成功, 人们普遍认为, 基本粒子间的相互作用都是受规范原理所制约的. 强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用都是通过非 Abel 规范场(杨-Mills 场)所描述的粒子来传递的[9].

本节讨论纯杨-Mills 场, 其 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \tag{3-3-1}$$

式中

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{3-3-2}$$

其中 f^a_{bc} 为规范群的结构常数. Lagrange 量(3-3-1)式是奇异的. 下面给出杨-Mills 场的正则形式表述. 以 $x^0=t$ 为动力学的演化参数. 相应于杨-Mills 规范势 A^a_μ 的正则动量

$$\pi^\mu_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^a_\mu} = -F^{0\mu}_a \tag{3-3-3}$$

因为 $F^{\mu\nu}_a$ 关于指标 μ 和 ν 是反对称的,所以初级约束

$$\phi^0_a = \pi^0_a \approx 0 \tag{3-3-4}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c = \int d^3x \mathscr{H}_c = \int d^3x(\pi^\mu_a \dot{A}^a_\mu - \mathscr{L}) =$$

$$\int d^3x\left(\pi^a_i \dot{A}^a_i - \frac{1}{2}\pi^a_i\pi^a_i + \frac{1}{4}F^a_{ij}F^a_{ij}\right) \tag{3-3-5}$$

将

$$\dot{A}^a_i = F^a_{0i} + \partial_i A^a_0 + gf^a_{bc}A^b_0 A^c_i \tag{3-3-6}$$

代入(3-3-5)式,分部积分并略去表面项后,可得

$$H_c = \int d^3x\left(\frac{1}{2}\pi^a_i\pi^a_i - A^a_0\partial_i\pi^a_i + \right.$$

$$\left.\frac{1}{4}F^a_{ij}F^a_{ij} + gf^a_{bc}A^b_0A^c_i\pi^a_i\right) \tag{3-3-7}$$

正则变量 A^a_μ、π^μ_a 间的基本 Poisson 括号为

$$\{A^a_\mu(t,\boldsymbol{x}),\pi^\nu_\beta(t,\boldsymbol{y})\} = \delta^a_\beta\delta^\nu_\mu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3-3-8a}$$

$$\{A^a_\mu(t,\boldsymbol{x}),A^\beta_\nu(t,\boldsymbol{y})\} = \{\pi^\mu_a(t,\boldsymbol{x}),\pi^\nu_\beta(t,\boldsymbol{y})\} = 0 \tag{3-3-8b}$$

总 Hamilton 量

$$H_T = H_c + \int d^3x\lambda^a(x)\pi^0_a(x) \tag{3-3-9}$$

由初级约束的自洽性条件,给出次级约束

$$\phi_a^1 = \{\pi_a^0, H_T\} = \partial_i \pi_a^i - g f_{bc}^a A_i^b \pi_c^i \approx 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}10)$$

用 D_μ 代表协变微商，对任意带群指标的函数 f^a，有

$$D_\mu f^a = \partial_\mu f^a - g f_{bc}^a A_\mu^b f^c \qquad (3\text{-}3\text{-}11)$$

以协变微商表示，$\phi_a^1 = D_i \pi_a^i \approx 0$. H_c 又可写为

$$H_c = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi_i^a \pi_i^a + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a - A_0^a \phi_a^1 \right) \qquad (3\text{-}3\text{-}12)$$

次级约束 ϕ_a^1 的自洽性条件在约束 $\phi_a^0 \approx 0$ 和 $\phi_a^1 \approx 0$ 所决定的超曲面上，已自动满足，因为

$$\{\phi_a^1, H_T\} = g f_{ab}^c A_0^b \phi_c^1 \qquad (3\text{-}3\text{-}13)$$

进一步计算表明：

$$\{\phi_a^0(t,\boldsymbol{x}), \phi_b^0(t,\boldsymbol{y})\} = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}14a)$$

$$\{\phi_a^0(t,\boldsymbol{x}), \phi_b^1(t,\boldsymbol{y})\} = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}14b)$$

$$\{\phi_a^1(t,\boldsymbol{x}), \phi_b^1(t,\boldsymbol{y})\} = - g f_{ab}^c \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \phi_c^1 \qquad (3\text{-}3\text{-}14c)$$

所以，约束间的 Poisson 括号弱等于 0，即约束 ϕ_a^0 和 ϕ_a^1 均为第一类约束.

杨-Mills 场的扩展 Hamilton 量

$$H_E = H_c + \int_V d^3x [\lambda^a(x)\phi_a^0(x) + \mu^a(x)\phi_a^1(x)] \qquad (3\text{-}3\text{-}15)$$

其正则方程分别为

$$\dot{A}_\mu^a(t,\boldsymbol{x}) = \{A_\mu^a(t,\boldsymbol{x}), H_E(t)\} \qquad (3\text{-}3\text{-}16a)$$

$$\dot{\pi}_a^\mu(t,\boldsymbol{x}) = \{\pi_a^\mu(t,\boldsymbol{x}), H_E(t)\} \qquad (3\text{-}3\text{-}16b)$$

$$\pi_a^0 \approx 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}16c)$$

$$D_i \pi_a^i \approx 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}16d)$$

§3-4 复标量场与 Chern-Simons 项耦合

微观粒子的自旋和它的统计性质密切相关，自旋为整数和自

旋为半奇数的粒子分别服从 Bose-Einstein 统计和 Fermi-Dirac 统计，并称它们为玻色子和费米子. 长期以来，人们一直认为自然界只存在这两类粒子，但在二维空间中运动的粒子会出现新的情况. 在二维空间中，粒子的统计性质可介于 Bose-Einstein 统计和 Fermi-Dirac 统计之间连续变化，即在二维空间中可有带任意统计性质的粒子，称为任意子(anyon)[10]. 根据自旋和统计的关系，通常说任意子具有分数自旋. 任意子最诱人之处在于它在凝聚态理论中的应用，例如，用于对量子 Hall 效应乃至高温超导的理论解释[11]. 用带 Chern-Simons 项的 Lagrange 量可以实现对任意子分数统计性的描述[12]. 带电粒子场与 Chern-Simons 项耦合后，显示出粒子的电荷和磁通自动地束缚在一起[11]. 交换两粒子，由于 Aharonov-Bohm效应，就体现出粒子具有分数(任意)统计性质. 在场论水平上研究任意子就是考虑 Chern-Simons 项与物质场的这种耦合. 例如：Chern-Simons 项与复标量场耦合在(1+2)维时空中的 Lagrange 量密度[13]

$$\mathscr{L} = (\mathrm{D}_\mu\varphi)^*(\mathrm{D}^\mu\varphi)^* + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda \tag{3-4-1}$$

式中：$\mathrm{D}_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu$；$\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$为 Levi-Civita 三阶全反对称张量，$\varepsilon_{012}=1$. 场量 A_μ、φ和 φ^* 的正则共轭动量分别为

$$\left.\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_0} = 0\\ \pi_i &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i} = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j\end{aligned}\right\} \tag{3-4-2}$$

$$\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = (\mathrm{D}_0\varphi)^* \tag{3-4-3}$$

$$\pi^* = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*} = \mathrm{D}_0\varphi \tag{3-4-4}$$

(3-4-2)式中 $\varepsilon^{ij}=\varepsilon^{0ij}$. 与(3-4-1)式对应的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi\dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathscr{L} =$$

$$\pi\pi^* - (D_i\varphi)^*(D^i\varphi) - A_0\left(\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j - J_0\right) \quad (3\text{-}4\text{-}5)$$

式中

$$J_0 = i(\pi\varphi - \varphi^*\pi^*) \quad (3\text{-}4\text{-}6)$$

在相空间中系统的初级约束

$$\Lambda_1 = \pi_0 \approx 0 \quad (3\text{-}4\text{-}7)$$

$$\theta_i = \pi_i - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}A^j \approx 0 \quad (i,j = 1,2) \quad (3\text{-}4\text{-}8)$$

总 Hamilton 量

$$H_T = \int d^2x(\mathscr{H}_c + \lambda_1\Lambda_1 + \mu_i\theta_i) \quad (3\text{-}4\text{-}9)$$

由初级约束 Λ_1 的自洽性条件 $\{\Lambda_1, H_T\} \approx 0$，可给出次级约束，即

$$\Lambda_2 = \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j - J_0 \approx 0 \quad (3\text{-}4\text{-}10)$$

由初级约束 θ_i 的自洽性条件 $\{\theta_i, H_T\} \approx 0$，可给出确定 Lagrange 乘子 μ_i 的方程，而不导致新的次级约束.

不难验证，Λ_1 和 Λ_2 为第一类约束，$\theta_i (i = 1,2)$ 为第二类约束. 这样就求出了 Lagrange 量(3-4-1)式描述的系统在相空间中的所有约束.

这里仅分析了系统的约束结构，系统量子化后所具有的分数自旋性质将在第六章中讨论.

下面简要说明 Chern-Simons Lagrange 量的性质. 一般情况下，Lagrange 量的密度[14]

$$\mathscr{L}_{CS} = \varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{tr}\left(\partial_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right) \quad (3\text{-}4\text{-}11)$$

规范场 A_μ 取值于规范李代数的有限维表示，$\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ 为全反对称，且 $\varepsilon^{012} = 1$. 对 Abel 规范理论，A_μ 对易，因此(3-4-11)式中的后一项为 0. 在规范变换 t

$$A_\mu \to A_\mu^g = g^{-1}A_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g \qquad (3\text{-}4\text{-}12)$$

下，有

$$\mathscr{L}_{\mathrm{CS}}(A) \to \mathscr{L}_{\mathrm{CS}}(A) - \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu \mathrm{tr}(\partial_\nu g g^{-1} A_\rho) - \frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{tr}(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\rho g) \qquad (3\text{-}4\text{-}13)$$

对 Abel Chern-Simons 理论，(3-4-13)式最后一项为 0，因此作用量 $I=\int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}_{\mathrm{CS}}$ 在规范变换下不变. 然而，对于非 Abel Chern-Simons理论，(3-4-13)式中的最后一项比例于群元素 g 的绕数(winding number). 因此，在规范变换下(具有非平凡的绕数)，非 Abel Chern-Simons 作用量改变一常数，这个性质对于研究量子非 Abel Chern-Simons 理论是十分重要的. 为了保证它的量子跃迁幅 $\exp(\mathrm{i}I)$在规范变换下不变，Chern-Simons Lagrange 量密度(3-4-11)式应乘以耦合常数

$$\kappa = \frac{n}{4\pi} \qquad (3\text{-}4\text{-}14)$$

式中 n 为整数.

在电磁学中，Lagrange 量在 Abel 规范变换下是不变的，而在 Abel Chern-Simons 理论中，规范变换下 Lagrange 量改变一散度项，但其作用量不变，这与电磁学中的情况不同. 杨-Mills 理论的经典 Lagrange 量在规范变换下是不变的. 而在非 Abel Chern-Simons理论中，在规范变换下不仅经典 Lagrange 量发生改变，而且经典作用量也发生变化. 只有在非 Abel Chern-Simons Lagrange量中的 $\kappa=n/4\pi$ 时，才能保证量子理论中的规范不变性. 对非Abel Chern-Simons 理论，在规范变换下，不是它的经典作用量不变，而是当 $\kappa=n/4\pi$ 时，其量子跃迁幅在规范变换下不变. 以后凡涉及到非 Abel Chern-Simons 理论的规范不变性就是对此种意义而言的. 这也有别于杨-Mills 理论.

§ 3-5 规范生成元的构成

用奇异 Lagrange 量(如规范理论)描述的系统在相空间中存在固有约束,即为约束 Hamilton 系统. 虽然约束系统的 Dirac 理论及其在场论中应用的研究已取得了相当的进展,但该理论中的某些基本问题,至今仍不断有讨论,其中之一就是 Dirac 猜想. 该猜想认为,系统的所有第一类约束均是规范变换的生成元,由它们生成物理态之间的等价变换. 尽管对这个猜想有不同争议,但是许多重要的物理系统,按 Dirac 猜想,尚未导致不正确的结果. 本节中将 Castellani[15]的讨论略加修改,并将其推广到场论中,导出了规范生成元的形式.

设场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}_{,\mu})$ $(\alpha=1,2,\cdots,n)$, 场的正则动量密度和 Hamilton 量密度分别为 $\pi_{\alpha}=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\psi}^{\alpha}$ 和 $\mathscr{H}_{c}=\pi^{\alpha}\dot{\psi}^{\alpha}-\mathscr{L}$(重复指标代表求和). 奇异 Lagrange 量的 Hess 矩阵 $[H_{\alpha\beta}]$退化,即

$$\det|H_{\alpha\beta}|=\det\left|\frac{\partial^{2}\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^{\alpha}\partial\dot{\psi}^{\beta}}\right|=0$$

由正则动量密度定义式不能全部解出 $\dot{\psi}^{\alpha}$ 作为 ψ^{α} 和 π_{α} 的函数. 设 Hess 矩阵的秩为 $n-R$,那么正则变量 ψ^{α} 和 π_{α} 之间在相空间中存在 R 个约束[1],即

$$\phi^{0}_{\alpha}(\psi^{\alpha},\pi_{\alpha})\approx 0\quad(\alpha=1,2,\cdots,R)\tag{3-5-1}$$

并将该约束称为初级约束. 式中"≈"代表弱等,表示等式在约束超曲面上成立. 此约束 Hamilton 的正则方程为

$$\dot{\psi}^{\alpha}=\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_{\alpha}}=\{\psi^{\alpha},H_{\mathrm{T}}\}\tag{3-5-2a}$$

$$\dot{\pi}_{\alpha}=-\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^{\alpha}}=\{\pi_{\alpha},H_{\mathrm{T}}\}\tag{3-5-2b}$$

其中

$$H_{\mathrm{T}}=H_{\mathrm{c}}+H_{1}=\int \mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda^{a}\phi_{a}^{0}) \tag{3-5-3}$$

式中：H_{T} 为总 Hamilton 量；H_{c} 为正则 Hamilton 量；$\lambda^{a}(x)$ 为 Lagrange乘子；$\{\cdot,\cdot\}$代表场的 Poisson 括号.

由初级约束的自洽性条件 $\{\phi_{a}^{0},H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$，可给出次级约束；由次级约束的自洽性条件，可逐次给出其他次级约束 $\phi_{a}^{k}=\{\phi_{a}^{k-1},H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$，直至 ϕ_{a}^{m} 适合

$$\phi_{a}^{m+1}=\{\phi_{a}^{m},H_{\mathrm{T}}\}=c_{ak}^{b}\,\phi_{b}^{k}\quad (k\leqslant m) \tag{3-5-4}$$

为止. 全部约束可分为两类，即是说，如果一个约束 ϕ_{a} 对任意约束 ϕ_{b} 均有 $\{\phi_{a},\phi_{b}\}=0\ (\mathrm{mod}\ \phi_{c})$，则称 ϕ_{a} 为第一类约束，否则为第二类约束.

从规范变换保持系统的正则方程(3-5-2)式不变出发，可以构造规范变换的生成元. 首先考虑系统仅含第一类约束的情形. 设系统的“轨线”$(\psi^{\alpha},\pi_{\alpha},\lambda^{\alpha})$和无穷小规范变更后的“轨线”$(\psi^{\alpha}+\xi^{\alpha},\pi_{\alpha}+\eta_{\alpha},\lambda^{\alpha}+\zeta^{\alpha})$均适合(3-5-1)、(3-5-2)式，在变更后的“轨线”方程中，关于 ξ、η、ζ 等小量展开，并利用未变更的“轨线”方程得

$$\dot{\xi}^{\alpha}\approx\int \mathrm{d}^{3}x\left(\frac{\delta^{2}H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^{\beta}\,\delta\pi_{\alpha}}\,\xi^{\beta}+\frac{\delta^{2}H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_{\beta}\,\delta\pi_{\alpha}}\,\eta_{\beta}\right) \tag{3-5-5a}$$

$$\dot{\eta}_{\alpha}\approx-\int \mathrm{d}^{3}x\left(\frac{\delta^{2}H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^{\beta}\,\delta\psi^{\alpha}}\,\xi^{\beta}+\frac{\delta^{2}H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_{\beta}\,\delta\psi^{\alpha}}\,\eta_{\beta}\right) \tag{3-5-5b}$$

$$\frac{\partial\phi_{a}^{0}}{\partial\psi^{\alpha}}\,\xi^{\alpha}+\frac{\partial\phi_{a}^{0}}{\partial\pi_{\alpha}}\,\eta_{\alpha}\approx 0 \tag{3-5-5c}$$

将规范变换的生成元表示为

$$G=\int \mathrm{d}^{3}x\ \varepsilon_{j}^{(k)}\,G_{k}^{j}(\psi^{\alpha},\pi_{\alpha}) \tag{3-5-6}$$

式中 $\varepsilon_{j}^{(k)}=\partial_{0}^{k}\varepsilon_{j}(x)$，其中 $\varepsilon_{j}(x)$为时空的任意函数. 由此生成元产生的正则变量的变更为

$$\xi^{\alpha} = \{\psi^{\alpha}, G\} = \frac{\delta G}{\delta \pi_{\alpha}},\ \eta_{\alpha} = \{\pi_{\alpha}, G\} = -\frac{\delta G}{\delta \psi^{\alpha}} \qquad (3\text{-}5\text{-}7)$$

将(3-5-7)式代入(3-5-5)式，由 $\varepsilon_j(x)$ 的任意性得

$$\frac{\partial}{\partial \psi^{\alpha}}[G^j_{k-1} + \{G^j_k, H_{\mathrm{T}}\}] = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi^0_a) \qquad (3\text{-}5\text{-}8\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi_{\alpha}}[G^j_{k-1} + \{G^j_k, H_{\mathrm{T}}\}] = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi^0_a) \qquad (3\text{-}5\text{-}8\mathrm{b})$$

$$\{G^j_k, \phi^0_a\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi^0_a) \qquad (3\text{-}5\text{-}8\mathrm{c})$$

因为正则变量变更后的轨线仍保持在约束超曲面上，对次级约束 ϕ^n_a 亦应有 $\{G^j_k, \phi^n_a\} \approx 0$，因此所有 G^j_k 可取为第一类约束. 由于系统仅含第一类约束，(3-5-8)式中可用 H_c 代替 H_{T}，从而得递推关系

$$\{G^j_0, H_c\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi^0_a) \qquad (3\text{-}5\text{-}9\mathrm{a})$$

$$G^j_{k-1} + \{G^j_k, H_c\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi^0_a)$$

$$(k = 1, 2, \cdots, m) \qquad (3\text{-}5\text{-}9\mathrm{b})$$

$$G^j_m = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi^0_a) \qquad (3\text{-}5\text{-}9\mathrm{c})$$

由(3-5-9b)式可知，G^j_{k-1} 可从 G^j_k 导出. 从每一个初级第一类约束 G^j_m 出发，由(3-5-9b)式可逐次求出 G^j_k，直至 G^j_0 适合(3-5-9a)式为止. 这样求出 G^j_k 后，代入(3-5-6)式就可构造出规范变换的生成元. 除 χ^n-型约束外，所有第一类约束均是规范生成元的组成部分[15].

当系统同时含第一类约束和第二类约束时，只要由初级第一类约束导出的次级第一类约束系列与第二类约束完全分开，上述构造规范生成元的方法对此类系统的第一类约束也是适用的.

例如：在超导理论中，电磁规范不变性自发破缺. 有质量光子规范不变的 Lagrange 量[16]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi - mA_{\mu}) \cdot (\partial^{\mu}\phi - mA^{\mu}) \qquad (3\text{-}5\text{-}10\mathrm{a})$$

式中

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \qquad (3\text{-}5\text{-}10\mathrm{b})$$

$\phi(x)$ 为标量场. 相应于场 $A_\mu(x)$ 和 $\phi(x)$ 的正则动量分别为

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = - F^{0\mu}(x) \qquad (3\text{-}5\text{-}11)$$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) - mA^0(x) \qquad (3\text{-}5\text{-}12)$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ik}^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{1}{2}m^2A_i^2 - mA_i\partial_i\phi + A^0(\partial_i\pi_i + m\pi) \qquad (3\text{-}5\text{-}13)$$

初级约束

$$\phi^0 = \pi^0 \approx 0 \qquad (3\text{-}5\text{-}14)$$

总 Hamilton 量

$$H_T = \int d^3x(\mathscr{H}_c + \lambda\phi^0) \qquad (3\text{-}5\text{-}15)$$

式中 $\lambda(x)$ 为 Lagrange 乘子. 由初级约束的自洽性条件，给出的次级约束

$$\phi^1 = \{\phi^0, H_T\} = \partial_i\pi_i + m\pi \approx 0 \qquad (3\text{-}5\text{-}16)$$

不难验证，再无其他约束了，并且 ϕ^0 和 ϕ^1 均为第一类约束. 按(3-5-6)、(3-5-9)式，求出的规范生成元为

$$G = \int_V d^3x[\varepsilon(x)(\partial_i\pi_i + m\pi) - \varepsilon(x)_{,0}\pi^0] = \int d^3x[\pi_\mu\partial^\mu\varepsilon(x) + m\pi\varepsilon(x)] \qquad (3\text{-}5\text{-}17)$$

由这个生成元产生的变换为

$$\left.\begin{aligned} &\delta A_\mu(x) = \{A_\mu(x), G\} = \partial_\mu\varepsilon(x), \quad \delta\pi^\mu(x) = 0 \\ &\delta\phi(x) = \{\phi(x), G\} = m\varepsilon(x), \quad \delta\pi(x) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}5\text{-}18)$$

在此变换下，系统的 Lagrange 量不变.

又例如：电磁场与旋量场耦合的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi \qquad (3\text{-}5\text{-}19)$$

式中

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \qquad (3\text{-}5\text{-}20)$$

与场 A^μ、ψ 和 $\bar{\psi}$相应的正则共轭动量分别为

$$\pi_0 = 0 \tag{3-5-21}$$

$$\pi_j = - F_{0j} \tag{3-5-22}$$

$$\pi_\psi = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \tag{3-5-23}$$

$$\pi_{\bar{\psi}} = 0 \tag{3-5-24}$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c = &\pi_\mu \dot{A}^\mu + \dot{\psi}\pi_\psi + \dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}} - \mathscr{L} = \\ &\frac{1}{2}\pi_j\pi_j + A^0(\partial^j\pi_j - \mathrm{i}e\pi_\psi\psi) + \frac{1}{4}F^{ij}F^{ij} - \\ &\pi_\psi\gamma^0\gamma^k(\partial^k\psi) + \mathrm{i}e\pi_\psi\gamma^0\gamma^k\psi A^k - \mathrm{i}m\pi_\psi\gamma^0\psi\end{aligned} \tag{3-5-25}$$

式中$\dot{\psi}\pi_\psi = (\partial_0\psi_\alpha)(\pi_\psi)_\alpha$，$\dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}} = (\partial_0\bar{\psi}_\alpha)(\pi_{\bar{\psi}})_\alpha$. 初级约束为

$$\phi^0 = \pi^0 \approx 0 \tag{3-5-26}$$

$$\phi_\psi^0 = \pi_\psi - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \tag{3-5-27}$$

$$\phi_{\bar{\psi}}^0 = \pi_{\bar{\psi}} \approx 0 \tag{3-5-28}$$

总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}} = \int \mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_c + \lambda\phi^0 + \lambda_1\phi_\psi^0 + \lambda_2\phi_{\bar{\psi}}^0) \tag{3-5-29}$$

式中 λ、λ_1、λ_2 为 Lagrange 乘子. 初级约束 $\phi_\psi^0 \approx 0$ 和 $\phi_{\bar{\psi}}^0 \approx 0$ 的自洽性条件给出的方程用以确定乘子 λ_1 和 λ_2. 初级约束(3-5-26)式的自洽性要求 $\{\phi^0, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0$，给出次级约束

$$\phi^1 = \partial^j\pi_j - \mathrm{i}e\pi_\psi\psi \approx 0 \tag{3-5-30}$$

(3-5-30)式的自洽性条件，不再导致新的次级约束.

将约束 ϕ^1、ϕ_ψ^0 和 $\phi_{\bar{\psi}}^0$ 做线性组合，

$$\begin{aligned}\Lambda_2 = &\phi^1 + \mathrm{i}e(\phi_\psi^0\psi + \bar{\psi}\phi_{\bar{\psi}}^0) = \\ &\partial^j\pi_j - \mathrm{i}e(\pi_\psi\psi + \bar{\psi}\pi_{\bar{\psi}})\end{aligned} \tag{3-5-31}$$

不难验证，$\Lambda_1=\phi^0$ 和 Λ_2 为第一类约束. 此时规范生成元可写为

$$G=\int \mathrm{d}^3x\{\dot{\varepsilon}(x)\pi_0(x)-\varepsilon(x)[\partial^j\pi_j(x)-$$

$$\mathrm{ie}(\pi_\psi(x)\psi(x)+\overline{\psi}(x)\pi_{\overline{\psi}}(x))\} \tag{3-5-32}$$

由 G 产生的规范变换为

$$\delta A^\mu(x)=\{A^\mu(x),G\}=\partial^\mu\varepsilon(x) \tag{3-5-33a}$$

$$\delta\pi_\mu(x)=0 \tag{3-5-33b}$$

$$\delta\psi(x)=\mathrm{ie}\varepsilon(x)\psi(x) \tag{3-5-33c}$$

$$\delta\overline{\psi}(x)=-\mathrm{ie}\varepsilon(x)\overline{\psi}(x) \tag{3-5-33d}$$

显然，在(3-5-33)式变换下，Lagrange 量(3-5-19)式是不变的.

纯杨-Mills 场的正则形式表述中，在相空间中系统存在两个第一类约束(见§3-3)，即

$$\phi_\alpha^0=\pi_\alpha^0\approx 0 \tag{3-5-34}$$

$$\phi_\alpha^1=\partial_i\pi_\alpha^i-gf_{\beta\gamma}^\alpha A_i^\beta\pi_\gamma^i\approx 0 \tag{3-5-35}$$

从初级约束 ϕ_α^0 出发，按(3-5-9)式有

$$G_\alpha^1=\phi_\alpha^0 \tag{3-5-36}$$

$$G_\alpha^0=-\phi_\alpha^1+\int \mathrm{d}^3y\,\omega_{\alpha\gamma}(x,y)\phi_\gamma^0 \tag{3-5-37}$$

从 $\{G_\alpha^0,H_c\}=0$ 的要求，$\omega_{\alpha\gamma}$ 可以确定为

$$\omega_{\alpha\gamma}(x,y)=-f_{\alpha\gamma}^\beta A_\beta^0\delta^{(3)}(x-y) \tag{3-5-38}$$

这样，杨-Mills 理论的规范生成元为

$$G(\varepsilon^\alpha,\dot{\varepsilon}^\alpha)=\int \mathrm{d}^3x[-\varepsilon^\alpha(x)(\phi_\alpha^1+f_{\alpha\gamma}^\beta A_\beta^0\pi_0^\gamma)+$$

$$\varepsilon^\alpha(x)_{,0}\pi_\alpha^0]=\int \mathrm{d}^3x[\pi_\alpha^\mu \mathrm{D}_\mu\varepsilon^\alpha(x)] \tag{3-5-39}$$

此生成元产生规范变换为

$$\left.\begin{aligned}\delta A_\mu^\alpha &= \partial_\mu \varepsilon^\alpha - f_{\beta\gamma}^\alpha \varepsilon^\beta A_\mu^\gamma \\ \delta \pi_\alpha^\mu &= f_{\alpha\beta}^\gamma \varepsilon^\beta \pi_\gamma^\mu\end{aligned}\right\} \tag{3-5-40}$$

在(3-5-40)式规范变换下，纯杨-Mills 场的 Lagrange 量密度是规范不变的.

§ 3-6　正则 Noether 定理

由奇异 Lagrange 量描述的系统在相空间中存在固有约束，为约束 Hamilton 系统，它在物理学许多领域中广泛存在. 约束理论在场论中(杨-Mills 理论，引力理论，超对称和超引力、弦(膜)场论等)占重要地位.

动力学系统对称性质的研究，通常是基于 Lagrange 体制，在位形空间中进行分析，经典 Noether 定理及其推广，均是在位形空间中进行的. 然而，动力学系统的量子化通常是由正则变量来实现. 由于奇异 Lagrange 量系统在相空间中存在约束，该系统的量子化与系统的约束结构密切相关. 为了进一步分析约束 Hamilton 系统的正则结构和约束性质，研究该约束系统在相空间中的对称性质是十分必要的. 对于奇异 Lagrange 量描述的有限自由度系统，在相空间中有限连续群和无限连续群下的对称性分析，在上一章中已讨论[17,18]. 这里研究场论中约束 Hamilton 系统的正则对称性质[19].

设场的 Lagrange 量密度 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_{,\mu})$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ 不显含时空坐标. 场的 Lagrange 量为 φ^α 和 $\dot{\varphi}^\alpha$ 的泛函[20]，即

$$L[\varphi^\alpha, \dot{\varphi}^\alpha] = \int_V \mathrm{d}^3x \mathscr{L} \tag{3-6-1}$$

用 Legendre 变换引入场的正则动量密度 $\pi_\alpha = \delta L/\delta\dot{\varphi}^\alpha$，并定义场的 Hamilton 量

$$H_c[\varphi^\alpha, \pi^\alpha] = \int_V \mathrm{d}^3x \mathscr{H}_c = \int_V \mathrm{d}^3x (\pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathscr{L}) \tag{3-6-2}$$

这样可将对场的 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述,重复指标代表求和. 系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{p}} \mathrm{d}t = \int \mathscr{L}^{\mathrm{p}} \mathrm{d}^4 x = \int \mathrm{d}^4 x (\pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}) \qquad (3\text{-}6\text{-}3)$$

(1)对于正规 Lagrange 量系统,其 Hess 矩阵为满秩的,I^{p} 为相空间中独立变量 $\varphi^\alpha(x)$ 和 $\pi_\alpha(x)$ 的泛函.

现在研究正规 Lagrange 量系统在相空间中的对称性质. 首先考虑正则作用量在时空坐标、场量及共轭动量的有限连续群下的变换性质. 该群含有限个群参数,其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned} & x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x;\varphi^\alpha,\pi_\alpha) \\ & \varphi^\alpha(x) \to \varphi^{\alpha\prime}(x') = \varphi^\alpha(x) + \Delta\varphi^\alpha(x) = \\ & \qquad\qquad \varphi^\alpha(x) + \varepsilon_\sigma \xi^{\alpha\sigma}(x;\varphi^\alpha,\pi_\alpha) \\ & \pi_\alpha(x) \to \pi_\alpha{}'(x') = \pi_\alpha(x) + \Delta\pi_\alpha(x) = \\ & \qquad\qquad \pi_\alpha(x) + \varepsilon_\sigma \eta_\alpha^\sigma(x;\varphi^\alpha,\pi_\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}6\text{-}4)$$

式中: $\varepsilon_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,r)$ 为独立参数;$\tau^{\mu\sigma}$、$\xi^{\alpha\sigma}$、η_α^σ 为 x、φ^α、π_α 的函数. 假设相空间中的 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 在(3-6-4)式的变换下改变为一个四维散度项 $\partial_\mu \Omega^\mu$,其中 $\Omega^\mu=\varepsilon_\sigma\Omega^{\mu\sigma}(x;\varphi^\alpha,\pi_\alpha)$,那么有[1]

$$\int \delta\mathscr{L}^{\mathrm{p}} \mathrm{d}^4 x + \int \partial_\mu(\mathscr{L}^{\mathrm{p}} \delta x^\mu) \mathrm{d}^4 x = \int \partial_\mu \Omega^\mu \mathrm{d}^4 x \qquad (3\text{-}6\text{-}5)$$

式中 δ 代表定域(实质)变分. 为了计算(3-6-5)式左端第一项,将整个空间分成许多小格子,第 i 个格子的体积元记为 $\Delta V(i)$,场量 $\varphi^\alpha(x)$ 在此体积元中的平均值记为 $\varphi_i^\alpha(t)$,对应于 $\varphi_i^\alpha(t)$ 的共轭动量记为 $p_\alpha^i(x)$. 对离散系统有(见 § 2-1)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L^{\mathrm{p}} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Big[\delta p_\alpha^i \Big(\dot{\varphi}_i^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha^i} \Big) + \\ \delta\varphi_i^\alpha \Big(-\dot{p}_\alpha^i - \frac{\partial H}{\partial \varphi_i^\alpha} \Big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_\alpha^i \delta\varphi_i^\alpha) \Big] \qquad (3\text{-}6\text{-}6)$$

由于 $p_\alpha^i(t) = \pi_\alpha^i(t)\Delta V(i)$,当 $\Delta V(i) \to 0$,$\varphi_i^\alpha(t) \to \varphi^\alpha(x)$,$\pi_\alpha^i(t) \to$

$\pi_\alpha(x)$，并且

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta\varphi^\alpha}&=\lim_{\Delta V(i)\to 0}\frac{1}{\Delta V(i)}\frac{\partial H}{\partial\psi_i^\alpha(t)}\\\frac{\delta H}{\delta\pi_\alpha}&=\lim_{\Delta V(i)\to 0}\frac{1}{\Delta V(i)}\frac{\partial H}{\partial\pi_\alpha^i(t)}\end{aligned}\right\}\tag{3-6-7}$$

所以，当 $\Delta V(i)\to 0$ 时，(3-6-6)式化为

$$\int\delta\mathscr{L}^{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}^4x=\int\mathrm{d}^4x\left[\delta\pi_\alpha\left(\dot{\varphi}^\alpha-\frac{\delta H}{\delta\pi_\alpha}\right)+\delta\varphi^\alpha\left(-\dot{\pi}_\alpha-\frac{\delta H}{\delta\varphi^\alpha}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_\alpha\delta\varphi^\alpha)\right]\tag{3-6-8}$$

式中

$$\delta\varphi^\alpha=\Delta\varphi^\alpha-\varphi^\alpha_{,\mu}\Delta x^\mu,\ \delta\pi_\alpha=\Delta\pi_\alpha-\pi_{\alpha,\mu}\Delta x^\mu\tag{3-6-9}$$

重复指标代表求和. 对时空指标求和时，其希腊字母由0～3，拉丁字母由1～3.

将(3-6-8)式代入(3-6-5)式，并利用系统的运动方程

$$\dot{\varphi}^\alpha=\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi_\alpha},\ \dot{\pi}_\alpha=-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi^\alpha}\tag{3-6-10}$$

得

$$\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_\alpha\delta\varphi^\alpha)+\partial_\mu(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}\delta x^\mu-\Omega^\mu)\right]=0\tag{3-6-11}$$

在四维时空中取一柱体，柱轴沿 t 轴方向. 设下底 V_1 代表 $t=t_1$ 的超平面，上底 V_2 代表 $t=t_2$ 的超平面. 在此四维柱体上对(3-6-11)式积分，利用四维 Gauss 定理及柱侧面趋于无穷时场为0的条件[21]得

$$\int_V\mathrm{d}^3x[\pi_\alpha(\xi^{\alpha\sigma}-\varphi^\alpha_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}\tau^{0\sigma}-\Omega^{0\sigma}]=\mathrm{const}$$
$$(\sigma=1,2,\cdots,r)\tag{3-6-12}$$

这样就得到了场论中正规 Lagrange 系统在相空间中的正则 Noether 定理，即如果在(3-6-4)式变换下，系统的正则 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 改变一个四维散度项，那么该系统就存在 r 个用

Hamilton 变量表述的守恒律(3-6-12)式. 将 Hamilton 变量转换到 Lagrange 变量，守恒律(3-6-12)式可化为位形空间中经典 Noether 定理的结果. 在一些具体问题中，$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 在相空间中具有一定的对称性，但 $\mathscr{L}$ 在位形空间中却不明显呈现出这种对称性. 此时，利用相空间中 Noether 定理便可导出 Hamilton 动力系的守恒律. 这种情形下的经典力学中的实例上章已讨论，但值得注意的是，守恒律(3-6-12)式中不含(3-6-4)式中的 η_α^σ. 这是由于共轭动量 $\pi_\alpha(x)$ 是 x、$\varphi^\alpha(x)$、$\dot{\varphi}^\alpha(x)$ 等变量的函数. x 和 $\varphi^\alpha(x)$ 的变换完全确定了 $\pi_\alpha(x)$ 的变换，即 η_α^σ 可作为 $\tau^{\mu\sigma}$ 和 $\xi^{\alpha\sigma}$ 的函数.

(2)由于奇异 Lagrange 量的 Hess 矩阵的行列式

$$\det|H_{\alpha\beta}| = \det\left|\frac{\delta^2 L}{\delta\dot{\varphi}^\alpha\,\delta\dot{\varphi}^\beta}\right| = 0 \qquad (3\text{-}6\text{-}13)$$

因而，由正则动量密度的定义，不能全部解出 $\dot{\varphi}^\alpha$ 作为 φ^α 和 π_α 的函数. 设 Hess 矩阵的秩为 $n-R$，那么正则变量之间存在 R 个约束条件，即

$$\phi_a^0(\varphi^\alpha,\pi_\alpha) = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,R) \qquad (3\text{-}6\text{-}14)$$

并将这些约束称为初级约束. 此约束 Hamilton 系统的运动方程为

$$\dot{\varphi}^\alpha = \frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_\alpha} = \{\varphi^\alpha, H_{\mathrm{T}}\} \qquad (3\text{-}6\text{-}15\mathrm{a})$$

$$\dot{\pi}_\alpha = -\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\varphi^\alpha} = \{\pi_\alpha, H_{\mathrm{T}}\} \qquad (3\text{-}6\text{-}15\mathrm{b})$$

式中：H_{T} 为总 Hamilton 量，

$$H_{\mathrm{T}} = H_{\mathrm{c}} + H_1 = \int_V \mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}} + \lambda^a\phi_a^0) \qquad (3\text{-}6\text{-}16)$$

其中 $\lambda^a(x)$ 为 Lagrange 乘子；$\{\cdot,\cdot\}$代表场论中的 Poisson 括号，

$$\{u,v\} = \int_V \mathrm{d}^3x\left(\frac{\delta u}{\delta\varphi^\alpha}\frac{\delta v}{\delta\pi_\alpha} - \frac{\delta u}{\delta\pi_\alpha}\frac{\delta v}{\delta\varphi^\alpha}\right) \qquad (3\text{-}6\text{-}17)$$

系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{p}} \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x (\pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}) \tag{3-6-18}$$

考虑时空坐标和正则变量在有限连续群下约束 Hamilton 系统的变换性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x;\varphi^\alpha,\pi_\alpha) \\ \varphi^{\alpha\prime}(x') &= \varphi^\alpha(x) + \Delta\varphi^\alpha(x) = \\ &\qquad \varphi^\alpha(x) + \varepsilon_\sigma \xi^{\alpha\sigma}(x;\varphi^\alpha,\pi_\alpha) \\ \pi'_\alpha(x') &= \pi_\alpha(x) + \Delta\pi_\alpha(x) = \\ &\qquad \pi_\alpha(x) + \varepsilon_\sigma \eta_\alpha^\sigma(x;\varphi^\alpha,\pi_\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{3-6-19}$$

式中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意参数. 假设在(3-6-19)式变换下，$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 的变更为 $\Delta\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\partial_\mu \Omega^\mu$，而 $\Omega^\mu=\varepsilon_\sigma \Omega^{\mu\sigma}$. 由(3-6-18)、(3-6-19)式有

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha}\delta\pi_\alpha + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^\alpha}\delta\varphi^\alpha + \partial_\mu(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}\delta x^\mu) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_\alpha \delta\varphi^\alpha) = \partial_\mu \Omega^\mu \tag{3-6-20}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_\alpha} = \dot{\varphi}^\alpha - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta \pi_\alpha}, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^\alpha} = -\dot{\pi}_\alpha - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi^\alpha} \tag{3-6-21}$$

$$\delta\pi_\alpha = \Delta\pi_\alpha - \pi_{\alpha,\mu}\delta x^\mu, \quad \delta\varphi^\alpha = \Delta\varphi^\alpha - \varphi^\alpha_{,\mu}\delta x^\mu \tag{3-6-22}$$

假设约束方程(3-6-14)式在(3-6-19)式变换下所确定的实质变分 $\delta\varphi^\alpha$和$\delta\pi_\alpha$不变，

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_\alpha}\delta\pi_\alpha + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\varphi^\alpha}\delta\varphi^\alpha = 0 \tag{3-6-23}$$

利用 Lagrange 乘子 λ^a，结合(3-6-20)、(3-6-23)式，由约束 Hamilton 系统的运动方程(3-6-15)式得

$$\partial_\mu(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}\delta x^\mu - \Omega^\mu) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_\alpha\delta\varphi^\alpha) = 0 \tag{3-6-24}$$

这样就得到场论中奇异 Lagrange 量系统正则形式的 Noether 第

一定理，即如果在(3-6-19)式变换下，约束 Hamilton 系统的正则作用量不变，且约束方程(3-6-14)式在(3-6-19)式所确定的实质变分下不变，那么此约束 Hamilton 系统存在 r 个守恒律，即

$$\int_V \mathrm{d}^3x[\pi_\alpha(\xi^{\alpha\sigma} - \varphi^\alpha_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_c\tau^{0\sigma} - \Omega^{0\sigma}] = \mathrm{const}$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{3-6-25}$$

这个结果是文献[17]在场论中的推广.

在内部变换($\delta x_\mu=0$)情形下，由(3-6-9)式可见，正则变量的总变分与实质变分相等；而在一般情形下($\delta x_\mu\neq 0$)，(3-6-23)式要求约束方程在(3-6-19)式变换下所确定的正则变量的实质变分 $\delta\varphi^\alpha$ 和 $\delta\pi_\alpha$ 是不变的，而不是约束方程在(3-6-19)式变换下所确定的正则变量的总变分 $\Delta\varphi^\alpha$ 和 $\Delta\pi_\alpha$ 不变. 只有要求约束方程在(3-6-19)式确定的正则变量的实质变分下不变，才能导出(3-6-25)式.

§3-7 声子场、电子场和电磁场的相互作用

电子-声子系统(极化子)是金属 BCS 理论的基础. 从能量角度考虑电子和声子的相互作用，已给出了相应的 Hamilton 量[22]. 近来对(1+1)维时空情形研究了用奇异 Lagrange 量来描述电子-声子系统[23]. 奇异 Lagrange 量描述的系统在相空间存在固有约束，文献[23]中按约束系统的 Dirac 理论，分析了该系统的正则量子化，这里将其推广到更一般的情形[24]. 考虑(1+3)维时空情形下，对相互作用的声子场、电子场和电磁场系统用奇异 Lagrange 量来描述，此时系统不仅含第二类约束，同时也含第一类约束. 用正则 Noether 定理导出了时空对称下的守恒量.

电子场和电磁场的相互作用，通过 $\partial_\mu\rightarrow(\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu)$ 来引进，这样对(1+3)维情形，声子场、电子场和电磁场系统的 Lagrange 量可写为[24]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \psi^*(t,\boldsymbol{x})\Big[\mathrm{i}(\partial_0 - \mathrm{ie}A_0) +$$

$$\frac{1}{2m}(\nabla - \mathrm{ie}\boldsymbol{A})^2\Big]\psi(t,\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}[\partial_0 q(t,\boldsymbol{x})]^2 +$$

$$\frac{1}{2}s[\partial_i q(t,\boldsymbol{x})]^2 - gq(t,\boldsymbol{x})\psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x}) \qquad (3\text{-}7\text{-}1)$$

式中：$\psi(t,\boldsymbol{x})$ 为电子场；$q(t,\boldsymbol{x})$ 为声子场；$F_{\mu\nu}$为电磁场场强张量，且 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，其中 $A_\mu = A_\mu(t,\boldsymbol{x}) = (\varphi(t,\boldsymbol{x}),\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}))$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$；s 和 g 为参数.

电子场、声子场、光子场的正则动量分别为

$$\pi_\psi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = \mathrm{i}\psi^* \qquad (3\text{-}7\text{-}2\mathrm{a})$$

$$\pi_{\psi^*} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^*} = 0 \qquad (3\text{-}7\text{-}2\mathrm{b})$$

$$\pi_q = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}} = \dot{q} \qquad (3\text{-}7\text{-}2\mathrm{c})$$

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -F^{0\mu} \qquad (3\text{-}7\text{-}2\mathrm{d})$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \pi_\psi\dot{\psi} + \pi_{\psi^*}\dot{\psi}^* + \pi_q\dot{q} - \pi_\mu\dot{A}^\mu - \mathscr{L} =$$

$$\frac{1}{2}\pi_i^2 - A_0\partial_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} - \mathrm{e}\psi^* A_0\psi - \frac{1}{2m}\psi^*[(\nabla -$$

$$\mathrm{ie}\boldsymbol{A})^2]\psi + \frac{1}{2}\pi_q^2 - \frac{1}{2}s(\partial_i q)^2 + gq\psi^*\psi \qquad (3\text{-}7\text{-}3)$$

由(3-7-2)式可见，系统存在的初级约束分别为

$$\left.\begin{aligned} \phi_1^0 &= \pi_\psi - \mathrm{i}\psi^* \approx 0 \\ \phi_2^0 &= \pi_{\psi^*} \approx 0 \\ \phi_3^0 &= \pi^0 \approx 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}7\text{-}4)$$

其总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}}=\int \mathrm{d}^3x[\mathscr{H}_c+\lambda_1\phi_1^0+\lambda_2\phi_2^0+\lambda_3\phi_3^0] \tag{3-7-5}$$

式中 $\lambda_1(t,\boldsymbol{x})$、$\lambda_2(t,\boldsymbol{x})$ 和 $\lambda_3(t,\boldsymbol{x})$ 分别为 Lagrange 乘子. 利用初级约束 ϕ_1^0 的自洽性条件 $\{\phi_1^0,H_T\}\approx 0$（$\{\cdot,\cdot\}$ 为场的泊松括号），由(3-7-4)、(3-7-5)式得

$$\mathrm{i}\lambda_2\approx-\mathrm{e}\psi^*A_0+\frac{1}{2m}(\nabla^2\psi^*+\mathrm{ie}\nabla\psi^*\cdot\boldsymbol{A}+\mathrm{ie}\nabla\cdot(\psi^*\boldsymbol{A})-\mathrm{e}^2A^2\psi^*)-gq\psi^* \tag{3-7-6}$$

由初级约束 ϕ_2^0的自洽性条件给出

$$\mathrm{i}\lambda_1\approx-\mathrm{e}\psi A_0-\frac{1}{2m}[\nabla^2\psi-\mathrm{ie}\nabla\psi\cdot\boldsymbol{A}-\mathrm{ie}\nabla\cdot(\psi\boldsymbol{A})-\mathrm{e}^2A^2\psi]+gq\psi \tag{3-7-7}$$

可见，ϕ_1^0和 ϕ_2^0的自洽性条件不导致新的次级约束，而是确定了 Lagrange 乘子 λ_1和 λ_2. 由初级约束 ϕ_3^0的自洽性条件可给出次级约束，即

$$\phi^1=\partial_i\pi_i+\mathrm{e}\psi^*\psi\approx 0 \tag{3-7-8}$$

次级约束 ϕ^1的自洽性条件给出

$$\frac{\mathrm{ie}}{2m}[\psi\nabla^2\psi^*-\psi^*\nabla^2\psi]-\frac{\mathrm{e}^2}{m}\nabla\cdot(\psi^*\psi\boldsymbol{A})+\mathrm{e}\lambda_1\psi^*+\mathrm{e}\lambda_1\psi\approx 0 \tag{3-7-9}$$

将(3-7-6)、(3-7-7)式代入(3-7-9)式得一平凡的等式，从而不产生新的约束.

将约束 ϕ_1^0、ϕ_2^0和 ϕ^1做线性组合，设

$$\Lambda_2=\phi^1+\mathrm{ie}(\psi\phi_1^0+\psi^*\phi_2^0)=\partial_i\pi_i-\mathrm{ie}(\psi\pi_\psi+\psi^*\pi_{\psi^*})\approx 0 \tag{3-7-10}$$

并记 $\Lambda_1=\pi_0\approx 0,\theta_1=\phi_1^0,\theta_2=\phi_2^0$. 不难验证，

$$\{\Lambda_1,\Lambda_2\}\approx 0,\{\Lambda_1,\theta_1\}\approx 0,\{\Lambda_2,\theta_2\}\approx 0 \tag{3-7-11a}$$

$$\{\theta_1,\Lambda_2\}=\mathrm{ie}\theta_1\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\approx 0 \tag{3-7-11b}$$

$$\{\theta_2, \Lambda_2\} = \mathrm{ie}\theta_2\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \approx 0 \tag{3-7-11c}$$

$$\{\theta_1, \theta_2\} = \mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{3-7-11d}$$

可见，Λ_1、Λ_2为第一类约束，θ_1、θ_2为第二类约束.

系统的正则 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 和约束均不显含时空坐标，它们在时空的平移和转动下均是不变的.

在空间平移下，由于空间同一点场的值相同，$\phi'(x') = \phi(x)$，因此(3-6-25)式中 $\xi^{i\sigma}=0$，此时 $\tau^{0\sigma}=0$. 根据(3-6-25)式可得系统的动量守恒，即

$$\boldsymbol{p} = -\int \mathrm{d}^3x(\pi_\mu \nabla A^\mu + \pi_\psi \nabla \psi + \pi_q \nabla q) = \mathrm{const} \tag{3-7-12}$$

在时间平移下，$\tau^{i\sigma}=0(i=1,2,3)$. 根据(3-6-25)式，在约束超曲面上得系统的守恒能量

$$E = \int \mathrm{d}^3x \Big\{ \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} - \frac{1}{2m}\psi^* [(\nabla - \mathrm{ie}\boldsymbol{A})^2]\psi + \frac{1}{2}\pi_q^2 - \frac{1}{2}s(\nabla q)^2 + gq\psi^*\psi \Big\} = \mathrm{const} \tag{3-7-13}$$

在空间转动下，$\tau^{0\sigma}=0$. 由(3-6-25)式得系统的守恒角动量[24]

$$J_{jk} = \int \mathrm{d}^3x \Big\{ \pi^\mu \Big(x_k \frac{\partial A_\mu}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial A_\mu}{\partial x_k} \Big) + \pi^\mu \Big(\sum\nolimits_{jk} \Big)_{\mu\nu} A^\nu + \pi_\psi \Big(x_k \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \Big) + \pi_q \Big(x_k \frac{\partial q}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial q}{\partial x_k} \Big) \Big\} \tag{3-7-14}$$

式中

$$\Big(\sum\nolimits_{\rho\sigma} \Big)_{\mu\nu} = g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} \tag{3-7-15}$$

系统的正则 Lagrange 量和初级约束在下列整体 $U(1)$ 群变换下不变：

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{ie}\epsilon}\psi(x), \quad \pi'_\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{ie}\epsilon}\pi_\psi(x) \tag{3-7-16}$$

式中 ϵ 为 $U(1)$ 群参数. 由(3-6-25)式得电荷守恒，即

$$Q = \mathrm{e}\int \mathrm{d}^3x\psi^*(x)\psi(x) = \mathrm{const} \tag{3-7-17}$$

以上4个守恒量 p、E、J_{jk}和 Q 也可以从位形空间中的经典 Noether 定理导出[1]，得到同样的结果.

§ 3-8 正则 Noether 恒等式(定域变换)

传统研究系统在无限连续群(定域变换)下的不变性是在位形空间中给出的[1]，该不变性导致系统作用量的泛函微商间存在的某些微分恒等式(Noether 恒等式). 这里研究系统在相空间中定域变换下的性质.

在有质量的杨-Mills 场论中(Lagrange 量中直接引入质量项)，在规范变换下 Lagrange 量一般是变更的；Fermi 场和规范场的规范不变 Lagrange 量在 Fermi 场的手征变换下是非不变的；BRS 不变的 Lagrange 量在规范场的单独变换下也是非不变的. 因此，研究定域变换下非不变系统的性质是必要的. 这里讨论系统在正则形式下的无限连续群下的性质，此时导致正则形式的广义 Noether 恒等式，在量子场论中相当于 Ward-Takahashi 恒等式.

现考虑正则形式的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + R^\mu_\sigma \varepsilon^\sigma(x) = x^\mu + A^{\mu\,\nu(k)}_\sigma \partial_{\nu(k)} \varepsilon^\sigma(x) \\ \varphi^{\alpha\prime}(x') &= \varphi^\alpha(x) + S^\alpha_\sigma \varepsilon^\sigma(x) = \varphi^\alpha(x) + B^{\alpha\nu(l)}_\sigma \partial_{\nu(l)} \varepsilon^\sigma(x) \\ \pi'_\alpha(x') &= \pi_\alpha(x) + T_{\alpha\sigma} \varepsilon^\sigma(x) = \pi_\alpha(x) + C^{\nu(m)}_{\alpha\sigma} \partial_{\nu(m)} \varepsilon^\sigma(x) \end{aligned}\right\} \tag{3-8-1}$$

式中：$\varepsilon^\sigma(x)$ 为无穷小任意函数，且 $\sigma = 1, 2, \cdots, r$；A、B、C 等系数均为 x、φ^α、π_α 的函数，并记

$$\nu(n) = \underbrace{\nu\sigma\cdots\lambda\rho}_{n}, \quad \partial_{(n)} = \partial_{\nu(n)} = \underbrace{\partial_\nu \partial_\sigma \cdots \partial_\lambda \partial_\rho}_{n} \tag{3-8-2}$$

在(3-8-1)式变换下，假设正则 Lagrange 量 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 的变更为

$$\delta \mathscr{L}^{\mathrm{P}} = \partial_\mu (\Lambda^\mu_\sigma \varepsilon^\sigma) + U_\sigma \varepsilon^\sigma \tag{3-8-3}$$

其中 Λ^μ_σ 和 U_σ 均为线性微分算符，

$$\Lambda^\mu_\sigma = f^{\mu\nu(i)}_\sigma \partial_{\nu(i)} \tag{3-8-4}$$

$$U_\sigma = u_\sigma^{\nu(n)} \partial_{\nu(n)} \tag{3-8-5}$$

系数 f、u 等均为 x、φ^α、π_α 的函数. 由(3-6-20)、(3-6-22)、(3-8-1)、(3-8-3)式有

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha}(T_{\alpha\sigma} - \pi_{\alpha,\mu} R_\sigma^\mu)\varepsilon^\sigma + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi^\alpha}(S_\sigma^\alpha - \varphi^\alpha_{,\mu} R_\sigma^\mu)\varepsilon^\sigma + \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi_\alpha(S_\sigma^\alpha - \varphi^\alpha_{,\mu} R_\sigma^\mu)\varepsilon^\sigma] + \partial_\mu(\mathscr{L}^{\mathrm{p}} R_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma) = \\
&\partial_\mu(\Lambda_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma) + U_\sigma \varepsilon^\sigma
\end{aligned} \tag{3-8-6}$$

将(2-5-6)式在四维时空区域 G 上积分，利用关系式

$$\begin{aligned}
A_\sigma^{\nu(n)} \partial_{\nu(n)} \varepsilon^\sigma = &(-1)^n (\partial_{\nu(n)} A_\sigma^{\nu(n)})\varepsilon^\sigma + \\
&\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial_\nu [\partial_{(j)} A_\sigma^{\nu(n)} (\partial_{(n-j-1)} \varepsilon^\sigma)]
\end{aligned} \tag{3-8-7}$$

将(3-8-7)式代入(3-8-6)式并将所得结果积分后再做分部积分. 由于 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的任意性，可选 $\varepsilon^\sigma(x)$ 及其所需的各级偏微商在区域边界上为0，这样利用 Gauss 定理，所有表面项均为0；再根据 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的任意性，可得 r 个微分恒等式[19]，即

$$\begin{aligned}
&\widetilde{T}_{\alpha\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha}\right) - \widetilde{R}_\sigma^\mu\left(\pi_{\alpha,\mu} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha}\right) + \widetilde{S}_\sigma^\alpha\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi^\alpha}\right) - \\
&\widetilde{R}_\sigma^\mu\left(\varphi^\alpha_{,\mu} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi^\alpha}\right) = \widetilde{U}_\sigma(1)
\end{aligned} \tag{3-8-8}$$

式中 $\widetilde{R}_\sigma^\mu$、$\widetilde{S}_\sigma^\alpha$、$\widetilde{T}_{\alpha\sigma}$和 $\widetilde{U}_\sigma$ 分别为 R_σ^μ、S_σ^α、$T_{\alpha\sigma}$和 U_σ 的伴随算符[25]. 例如：

$$\int_G f R_\sigma^\mu g \mathrm{d}^4 x = \int_G g \widetilde{R}_\sigma^\mu f \mathrm{d}^4 x + [\cdot]_B \tag{3-8-9}$$

式中：f、g 为定义在区域 G 上的函数；$[\cdot]_B$ 为相应的表面项(在区域边界 B 上的积分). 这样就得到正则形式的广义 Noether 第二定理，即如果相空间 Lagrange 量 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 在无限连续群的无穷小变换(3-8-1)式下，其变更由(3-8-3)式决定. 那么，必存在 r 个含 I^{p} 泛

函微商的恒等式(3-8-8)式，并将该式称为正则形式的 Noether 恒等式.

这个结果也是文献[17]在场论中的推广.(3-8-8)式的成立与场量 φ^{α} 和 π_{α} 是否适合运动方程无关.(3-8-8)式表明，泛函微商 $\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\varphi^{\alpha}$ 和 $\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\pi_{\alpha}$ 之间存在着一定的关系.

当约束 Hamilton 系统的 Hamilton 量和约束方程给定后，将约束方程结合(3-8-8)式，可以给出正则变量以及 Lagrange 乘子间更多的关系式，或者给出 Dirac-Bergmann 求次级约束的程序应终止的那一步.

下面简单讨论一下定域正则 Noether 恒等式在杨-Mills 场论中的应用.由于杨-Mills 理论中的规范变换可写为

$$\left.\begin{aligned}&\delta x^{\mu}=0\\&\delta\varphi^{\alpha}(x)=b_{\sigma}^{\alpha}\,\varepsilon^{\sigma}(x)+b_{\sigma}^{\alpha\mu}\,\partial_{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)\\&\delta\pi_{\alpha}(x)=c_{\alpha\sigma}\,\varepsilon^{\sigma}(x)\end{aligned}\right\}\tag{3-8-10}$$

式中 $\varepsilon^{\sigma}(x)$ 为时空点的任意函数.系统规范不变性导致的正则 Noether 恒等式为

$$c_{\alpha\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}}+b_{\sigma}^{\alpha}\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi^{\alpha}}=\partial_{\mu}\left(b_{\sigma}^{\alpha\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi^{\alpha}}\right)\tag{3-8-11}$$

这样，就得到了泛函微商 $\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\varphi^{\alpha}$、$\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\pi_{\alpha}$ 以及它们导数之间的关系式.这表明对规范不变系统，泛函微商 $\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\varphi^{\alpha}$ 和 $\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\pi_{\alpha}$ 之间彼此是不独立的.

在(3-8-10)式定域变换下，正则作用量不变的系统有基本恒等式

$$\begin{aligned}&\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi^{\alpha}}(b_{\sigma}^{\alpha}\varepsilon^{\sigma}+b_{\sigma}^{\alpha\mu}\,\partial_{\mu}\,\varepsilon^{\sigma})+\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}}c_{\alpha\sigma}\varepsilon^{\sigma}+\\&\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi_{\alpha}(b_{\sigma}^{\alpha}\varepsilon^{\sigma}+b_{\sigma}^{\alpha\mu}\,\partial_{\mu}\,\varepsilon^{\sigma})]=0\end{aligned}\tag{3-8-12}$$

用 $\varepsilon^{\sigma}(x)$ 乘(3-8-11)式，将所得结果与(3-8-12)式相减得

$$\partial_{\mu}\left(b_{\sigma}^{\alpha\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}}\varepsilon^{\sigma}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi_{\alpha}(b_{\sigma}^{\alpha}\varepsilon^{\sigma}+b_{\sigma}^{\alpha\mu}\partial_{\mu}\varepsilon^{\sigma})]=0 \qquad (3\text{-}8\text{-}13\mathrm{a})$$

相空间中的正则 Noether 恒等式(3-8-11)、(3-8-13a)式均与 φ^{α}、π_{α} 是否适合系统的运动方程无关. 考虑一约束 Hamilton 系统，它的运动方程是由扩展 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{E}}=H_{\mathrm{c}}+H_{1}=\int\mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda^{b}\phi_{b})$$

导出的，其中 ϕ_{b} 为所有第一类约束. 沿着此约束 Hamilton 系统运动的轨线，正则 Noether 恒等式(3-8-11)可化为

$$c_{\alpha\sigma}\frac{\delta H_{1}}{\delta\pi_{\alpha}}+b_{\sigma}^{\alpha}\frac{\delta H_{1}}{\delta\varphi^{\alpha}}=\partial_{\mu}\left(b_{\sigma}^{\alpha\mu}\frac{\delta H_{1}}{\delta\varphi^{\alpha}}\right) \qquad (3\text{-}8\text{-}13\mathrm{b})$$

(3-8-13b)式可能给出非平凡的结果，例如它给出场的正则变量和 Lagrange 乘子的关系. 将正则 Noether 恒等式用于色动力学，就会出现这种情况[19]；用于电磁学，(3-8-13b)式将变为平凡的等式.

由位形空间经典 Noether 恒等式可以证明：规范不变的系统必含 Dirac 约束[1]. 利用正则形式的 Noether 恒等式，也可以证明：某些非不变系统也具有 Dirac 约束.

设系统在下列无穷小变换

$$\left.\begin{aligned}&x^{\mu\prime}=x^{\mu}\\&\varphi^{\alpha\prime}(x')=\varphi^{\alpha}(x)+b_{\sigma}^{\alpha}\varepsilon^{\sigma}(x)+b_{\sigma}^{\alpha\mu}\partial_{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)\\&\pi'_{\alpha}(x')=\pi_{\alpha}(x)+c_{\alpha\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x)\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}8\text{-}14)$$

下，Lagrange 量 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 的变更为

$$\delta\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=(u_{\sigma}+u_{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}+u_{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu})\varepsilon^{\sigma}(x) \qquad (3\text{-}8\text{-}15)$$

式中：u_{σ} 和 u_{σ}^{μ} 为 x、φ^{α} 和 π_{α} 的函数；$u_{\sigma}^{\mu\nu}$ 为 x 和 φ^{α} 的函数. 例如某些有质量杨-Mills 场论模型[25]就属于这种情况. 这时广义 Noether 恒等式(3-8-8)式为

$$c_{\alpha\sigma}\left(\dot{\varphi}^{\alpha}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi_{\alpha}}\right)+b_{\sigma}^{\alpha}\left(-\dot{\pi}_{\alpha}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi^{\alpha}}\right)-$$

$$\partial_{\mu}\left[b_{\sigma}^{\alpha\mu}\left(-\dot{\pi}_{\alpha}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi^{\alpha}}\right)\right]=$$

$$u_\sigma - \partial_\mu u_\sigma^\mu + \partial_\mu \partial_\nu u_\sigma^{\mu\nu} \tag{3-8-16}$$

注意到 π_α 的定义有

$$\dot{\pi}_\alpha = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha \partial \varphi^\beta} \dot{\varphi}^\beta + \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha \partial \dot{\varphi}^\beta} \ddot{\varphi}^\beta \tag{3-8-17}$$

由于 φ^α 的任意性，(3-8-16)式中含 φ^α 最高阶时间微商的项之和应为0，而与其他项无关，

$$b_\sigma^{\alpha\mu} \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\varphi}^\alpha \delta \dot{\varphi}^\beta} \dddot{\varphi}^\beta = 0 \tag{3-8-18}$$

(3-8-18)式对任意 φ^β 的三阶时间微商均成立，于是有

$$b_\sigma^{\alpha\mu} H_{\alpha\beta} = 0 \quad \left(H_{\alpha\beta} = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\varphi}^\alpha \delta \dot{\varphi}^\beta} \right) \tag{3-8-19}$$

由于 $b_\sigma^{\alpha\mu}$ 不全为0(如规范变换)，(3-8-19)式表明 $\det|H_{\alpha\beta}|=0$，即 Hess 矩阵是退化的，系统具有 Dirac 约束.

对于正则形式规范不变的系统，利用正则 Noether 恒等式作类似讨论可知，系统具有 Dirac 约束.

由以上分析可知，初级约束不来源于系统的运动方程，次级约束是由约束相容性条件导出的；而约束的相容性条件不来源于系统的定域不变性质，离开约束系统运动的轨线，相容性条件不一定成立. Dirac-Bergmann 计算次级约束的程序，只有在约束的超曲面上才成立[26].

利用正则 Noether 恒等式，在某些情形下，可以导出强守恒律和弱守恒律. 设系统在(3-8-14)式变换下正则 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 的变更由(3-8-15)式给出. 此时基础恒等式为

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha} c_{\alpha\sigma} \varepsilon^\sigma + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi^\alpha} (b_\sigma^\alpha + b_\sigma^{\alpha\mu} \partial_\mu) \varepsilon^\sigma + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\pi_\alpha (b_\sigma^\alpha + b_\sigma^{\alpha\mu} \partial_\mu) \varepsilon^\sigma] = (u_\sigma + u_\sigma^\mu \partial_\mu + u_\sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu) \varepsilon^\sigma \tag{3-8-20}$$

用 $\varepsilon^\sigma(x)$ 乘(3-8-16)式，并对 σ 从$1\sim r$ 求和，然后将所得结果与(3-8-20)式相减. 当 $u_\sigma^{\mu\nu}$ 对于指标 μ 和 ν 对称时得

$$\partial_{\mu}\left[\left(b_{\sigma}^{\alpha\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}}-u_{\sigma}^{\mu}-\partial_{\nu}u_{\sigma}^{\mu\nu}+u_{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\nu}\right)\varepsilon^{\sigma}\right]+$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\pi_{\alpha}(b_{\sigma}^{\alpha}+b_{\sigma}^{\alpha\mu}\partial_{\mu})\varepsilon^{\sigma}\right]=0 \qquad (3\text{-}8\text{-}21)$$

将(3-8-21)式在 $t=\mathrm{const}$ 的类空超曲面 V 上积分得强守恒律，即

$$J=\int_{V}j_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}\mathrm{d}^{3}x=\mathrm{const} \qquad (3\text{-}8\text{-}22)$$

式中

$$j_{\sigma}=b_{\sigma}^{\alpha0}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}}-u_{\sigma}^{0}-\partial_{\nu}u_{\sigma}^{0\nu}+u_{\sigma}^{0\nu}\partial_{\nu}+\pi_{\alpha}(b_{\sigma}^{\alpha}+b_{\sigma}^{\alpha\nu}\partial_{\nu}) \qquad (3\text{-}8\text{-}23)$$

在导出(3-8-22)式时，未利用系统的运动方程，因此，强守恒律(3-8-22)式的成立与 φ^{α} 和 π_{α} 是否适合运动方程无关.

设无限连续群有子群，且 $\varepsilon^{\sigma}(x)=\varepsilon_{0}^{\rho}\zeta_{\rho}^{\sigma}(x)$. 其中 ε_{0}^{ρ}为连续群的数值参数；$\zeta_{\rho}^{\sigma}(x)$ 为给定的函数. 此时由强守恒律(3-8-22)式，得

$$J_{\rho}=\int_{V}j_{\sigma}\zeta_{\rho}^{\sigma}\mathrm{d}^{3}x \qquad (3\text{-}8\text{-}24)$$

设系统的运动方程(正则方程)由 $H_{\mathrm{E}}=H_{\mathrm{c}}+H_{1}$导出. 那么，沿着约束系统运动的轨线，由(3-8-23)、(3-8-24)式可得弱守恒律，即

$$J_{\rho}^{w}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x\left\{\left[b_{\sigma}^{\alpha0}\frac{\delta H_{1}}{\delta\varphi^{\alpha}}-u_{\sigma}^{0}-\partial_{\nu}u_{\sigma}^{0\nu}+u_{\sigma}^{0\nu}\partial_{\nu}+\pi_{\alpha}(b_{\sigma}^{\alpha}+b_{\sigma}^{\alpha\nu}\partial_{\nu})\right]\zeta_{\rho}^{\sigma}\right\}=\mathrm{const}$$

$$(\rho=1,2,\cdots,r) \qquad (3\text{-}8\text{-}25)$$

在规范场理论中，为了导出规范不变的能量动量张量，所采用的规范协变平移群就属于这种子群[9]. 类似的情况在研究规范不变的角动量张量时也会出现.

由此可见，在某些情形下，正则形式的 Noether 恒等式沿系统运动的轨线可化为弱守恒律，即使是 Lagrange 量在定域变换下是非不变的情况，也可得弱守恒律. 这种导致守恒律的程式和正则形式的 Noether 第一定理是完全不同的，Noether 第一定理是有限

连续群下的不变性所决定的守恒量.从正则 Noether 恒等式可导出系统运动的守恒量,给出一个求守恒律的新方法;将这个结果用于杨-Mills 场,可导出有别 BRST 荷的新的守恒荷[27].

下面具体讨论正则 Noether 恒等式在 Abel 和非 Abel 规范场论中的应用.

§3-9 Abel 规范场与荷电 Bose 场耦合

电磁场 $A_\mu(x)$ (Abel 规范场)与荷电 Bose 场 $\varphi(x)$ 耦合的 Lagrange量密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}[(\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu)\varphi]^*(\partial_\mu-\mathrm{i}eA^\mu)\varphi-V(\varphi\varphi^*) \tag{3-9-1}$$

式中

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

$$V(\varphi\varphi^*)=\mu\varphi\varphi^*+\frac{1}{2}\lambda(\varphi\varphi^*)^2 \tag{3-9-3}$$

当 $\mu>0$且 $\lambda\neq0$时,$\varphi(x)$ 场描写的 Bose 子有质量并具有自作用;当 $\mu<0$且 $\lambda>0$时,称 $V(\varphi\varphi^*)$ 为 Higgs 势. Lagrange 量(3-9-1)式在 $U(1)$ 规范变换下是不变的. 现将 $\varphi(x)$ 记为$\varphi(x)=\eta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$. 若以新场$\eta(x)$ 和 $\theta(x)$ 代替原有场 $\varphi(x)$ 和$\varphi^*(x)$,那么,用新场表示出的 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta)-V(\eta)-\frac{1}{2}\eta^2(\partial_\mu\theta)(\partial^\mu\theta)+A_\mu j^\mu+\frac{1}{2}e\eta^2A_\mu A^\mu \tag{3-9-4}$$

式中

$$j^\mu=-e\eta^2(\partial^\mu\theta+eA^\mu) \tag{3-9-5}$$

Lagrange 量(3-9-4)式在下列定域变换

$$\left.\begin{aligned}&A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\varepsilon(x)\\&\eta(x)\to\eta'(x)=\eta(x)\\&\theta(x)\to\theta'(x)=\theta(x)+\mathrm{e}\varepsilon(x)\end{aligned}\right\}\tag{3-9-6}$$

下不变. 场量 $A_\mu(x)$、$\eta(x)$ 和 $\theta(x)$ 相应的正则共轭动量分别为

$$\pi^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu}=-F^{0\mu}\tag{3-9-7}$$

$$\pi_\eta=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}}=\partial_0\eta\tag{3-9-8}$$

$$\pi_0=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}}=\eta^2(\partial_0\theta+\mathrm{e}A_0)\tag{3-9-9}$$

初级约束

$$\phi^0=\pi^0\approx0\tag{3-9-10}$$

正则 Hamilton 量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\mathrm{c}=&\pi^\mu\dot{A}_\mu+\pi_\eta\dot{\eta}+\pi_\theta\dot{\theta}-\mathscr{L}=\\&\frac{1}{2}\pi_i\pi_i-A_0\partial_i\pi_i+\frac{1}{4}F_{ik}F_{ik}+\frac{1}{2}\pi_\eta^2+\frac{1}{2\eta^2}\pi_\theta^2-\\&\mathrm{e}A_0\pi_\theta+\frac{1}{2}\eta^2(\partial_k\theta)(\partial_k\theta)+\frac{1}{2}(\partial_k\eta)(\partial_k\eta)+\\&V(\eta)+\mathrm{e}\eta^2A_k\left(\partial_k\theta+\frac{1}{2}\mathrm{e}A_k\right)\end{aligned}\tag{3-9-11}$$

由初级约束的自洽性条件 $\{\pi^0,H_\mathrm{T}\}\approx0$(其中 $H_\mathrm{T}=\int\mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_\mathrm{c}+\lambda\pi^0)$), 导出次级约束

$$\phi^1=\partial_i\pi_i+\mathrm{e}\pi_\theta\approx0\tag{3-9-12}$$

此时,系统再无其他约束. 显然,ϕ^0和 ϕ^1为第一类约束.

正则 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^\mathrm{p}$ 在下列相空间中的变换

$$\left.\begin{aligned}&\delta A_\mu=S_\mu\varepsilon(x)=\partial_\mu\varepsilon(x),\quad\delta\eta(x)=0\\&\delta\theta=S\theta(x)=\mathrm{e}\varepsilon(x),\quad\delta\pi^\mu=0,\quad\delta\pi_\eta=0\\&\delta\pi_\theta=T\varepsilon(x)=2\mathrm{e}\eta^2\partial_0\varepsilon(x)\end{aligned}\right\}\tag{3-9-13}$$

下不变，此时(3-8-8)式成为

$$\widetilde{T}\left(\dot{\theta}-\frac{\delta H_c}{\delta\pi_\theta}\right)+\widetilde{S}_\mu\left(-\dot{\pi}^\mu-\frac{\delta H_c}{\delta A_\mu}\right)+$$

$$\widetilde{S}\left(-\dot{\pi}_\theta-\frac{\delta H_c}{\delta\theta}\right)=0 \qquad (3\text{-}9\text{-}14)$$

对于规范不变系统，Dirac 猜想有效[28]，系统的动力学方程可由扩展 Hamilton 量 H_E 导出，而

$$H_E=H_c+H_1=\int d^3x[\mathscr{H}_c+\lambda\pi^0+\mu(\partial_i\pi_i+e\pi_\theta)] \quad (3\text{-}9\text{-}15)$$

式中 $\lambda(x)$ 和 $\mu(x)$ 均为 Lagrange 乘子. 沿着约束 Hamilton 系统运动的轨线，(3-9-14)式化为

$$\widetilde{T}\frac{\delta H_1}{\delta\pi_\theta}+\widetilde{S}_\mu\frac{\delta H_1}{\delta A_\mu}+\widetilde{S}\frac{\delta H_1}{\delta\theta}=0 \qquad (3\text{-}9\text{-}16)$$

将(3-9-13)、(3-9-15)式代入(3-9-16)式，得

$$\partial_0[\mu(x)\ \eta^2(x)]=0 \qquad (3\text{-}9\text{-}17)$$

(3-9-17)式表明，Hamilton 量中与次级第一类约束相联系的 Lagrange乘子 $\mu(x)$，使得 $\mu(x)\ \eta^2(x)$ 量不显含时间.

对于自由电磁场 Dirac 猜想成立. 沿着约束系统运动的轨线，正则 Noether 恒等式成为平凡的等式.

对 Proca 场 A_μ 与外源 j^μ 耦合的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu+A_\mu j^\mu \qquad (3\text{-}9\text{-}18)$$

式中

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

与前面类似的讨论，在 A^μ 及其正则共轭动量 π_μ 的下列变换

$$\delta A^\mu(x)=\partial^\mu\varepsilon(x),\ \delta\pi_\mu(x)=0 \qquad (3\text{-}9\text{-}19)$$

下，导致的正则 Noether 恒等式，沿着系统运动的轨线得

$$m^2\partial_\mu A^\mu+\partial_\mu j^\mu=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}20)$$

可见,流 j^μ 守恒和 Lorentz 条件等价.对电磁场与外源耦合的情况表明,电荷密度与电流密度满足连续性方程.当荷电粒子在电磁场中运动时,正则 Noether 恒等式的应用就得到这样的结果[17].

§3-10 非 Abel 规范场与物质场耦合

非 Abel 规范场(杨-Mills 场)与标量场 $\varphi(x)$ 耦合的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}[(\mathrm{D}_\mu\varphi)^a]^2 - V(\varphi) \qquad (3\text{-}10\text{-}1\mathrm{a})$$

式中

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu \qquad (3\text{-}10\text{-}1\mathrm{b})$$

其中 A^a_μ 为规范势,指标 a 与非 Abel 规范群 G 的生成元的个数相对应;f^a_{bc} 为规范群 G 的反对称结构常数;标量(Higgs)场 φ^a 属于规范群 G 的正交表示,而

$$(\mathrm{D}_\mu\varphi)^a = \partial_\mu\varphi^a + g A^c_\mu I^c_{ab}\varphi^b \qquad (3\text{-}10\text{-}2)$$

式中反对称矩阵 I^a 为表示的生成元.位势 $V(\varphi)$ 是 $\varphi(x)$ 的四次多项式,在规范群 G 的作用下不变[29].

场量 A^a_μ 和 φ^a 的正则共轭动量分别为

$$\pi^\mu_a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^a_\mu} = -F^{0\mu}_a \qquad (3\text{-}10\text{-}3)$$

$$\pi_a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^a} = (\mathrm{D}^0\varphi)^*_a \qquad (3\text{-}10\text{-}4)$$

初级约束

$$\phi^0_a = \pi^0_a \approx 0 \qquad (3\text{-}10\text{-}5)$$

正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\pi^a_i\pi^a_i + \frac{1}{2}\pi^a\pi^a + \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2 + \frac{1}{2}[(\mathrm{D}_i\varphi)^a]^2 +$$

$$V(\varphi) - A_0(\partial_i \pi_i^a + g f_{ab}^c A_i^b \pi_c^i - g I_{bc}^a \varphi^b \pi^c) \quad (3\text{-}10\text{-}6)$$

总 Hamilton 量

$$H_T = \int_V d^3x(\mathscr{H}_c + \lambda^a \pi_a^0) \quad (3\text{-}10\text{-}7)$$

式中 λ^a 为 Lagrange 乘子. 由初级约束的自洽性条件 $\{\pi_a^0, H_T\} \approx 0$，可给出次级约束

$$\phi_a^1 = \partial_i \pi_i^a - g f_{bc}^a A_i^b \pi_i^c - g I_{bc}^a \varphi^b \pi^c \approx 0 \quad (3\text{-}10\text{-}8)$$

约束（3-10-5）、（3-10-8）式均为第一类约束. 正则 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^p$ 在下列变换

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\varphi^a = S_b^a \varepsilon^b(x) = -\mathrm{i} g I_{b\sigma}^a \varphi^\sigma \varepsilon^b(x) \\
&\delta\pi^a = T_b^a \varepsilon^b(x) = (\partial_0 S_b^a + g A_0^c I_{a\sigma}^c S_b^\sigma \partial_0)\varepsilon^b(x) \\
&\delta A_\mu^a = \mathrm{D}_{b\mu}^a \varepsilon^b(x), \ (\mathrm{D}_{b\mu}^a = \delta_b^a \partial_\mu + g f_{bc}^a A_\mu^c) \\
&\delta\pi_a^\mu = T_{ab}^\mu \varepsilon^b(x), \ (T_{ab}^\mu = g f_{bc}^a \pi_c^\mu)
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}10\text{-}9)$$

下不变. 对于规范不变的系统，系统的运动方程是由扩展 Hamilton 量 H_E 导出的. 沿着系统运动的轨线(3-8-8)式可化为

$$\widetilde{T}_b^a\left(\frac{\delta H_1}{\delta\pi^a}\right) + \widetilde{S}_b^a\left(\frac{\delta H_1}{\delta\varphi^a}\right) + \widetilde{T}_{ab}^\mu\left(\frac{\delta H_1}{\delta\pi_a^\mu}\right) + \widetilde{\mathrm{D}}_{b\mu}^a\left(\frac{\delta H_1}{\delta A_\mu^a}\right) = 0 \quad (3\text{-}10\text{-}10)$$

式中

$$H_1 = \int d^3x[\lambda^a \pi_a^0 + \mu_a(\partial_i \pi_i^a + g f_{ab}^c A_i^b \pi_c^i - g\varphi^b I_{bc}^a \pi^c)] \quad (3\text{-}10\text{-}11)$$

而 $\lambda^a(x)$ 和 $\mu_a(x)$ 均为 Lagrange 乘子. 将(3-10-9)、(3-10-11)式代入(3-10-10)式，得

$$\mathrm{i} g^2 I_{c\sigma}^a I_{\delta\sigma}^b I_{\lambda a}^\rho \mu_\rho A_0^c \varphi^\delta \varphi^\lambda - \mathrm{i} g I_{a\delta}^b I_{a\lambda}^\rho \varphi^\delta \partial_0(\mu_\rho \varphi^\lambda) + \mathrm{i} g I_{a\delta}^b I_{ac}^\rho \mu_\rho \varphi^\delta \pi^c + f_{bc}^a[\mu_a \partial_i \pi_i^c +$$

$$g f^{\rho}_{\sigma a}\mu_{\rho}(\pi^{\sigma}_{i}A^{c}_{i} - \pi^{c}_{i}A^{\sigma}_{i})] = 0 \qquad (3\text{-}10\text{-}12)$$

这样采用 Dirac 猜想，就能得到 Lagrange 量(3-10-1)式描述的系统，即正则变量和 Lagrange 乘子间的一些补充关系(3-10-12)式．该乘子就是出现在前面的系数．

对于纯杨-Mills 场 Dirac 猜想有效[15]．沿着系统运动的轨线，正则 Noether 恒等式(3-8-8)可化为

$$f^{a}_{bc}(\mu_{a}\partial_{i}\pi^{c}_{i} + g f^{\rho}_{\sigma a}\mu_{\rho}(\pi^{\sigma}_{i}A^{c}_{i} - \pi^{c}_{i}A^{\sigma}_{i})] = 0 \qquad (3\text{-}10\text{-}13)$$

此补充关系式不含与次级第一类约束相联系的 Lagrange 乘子 $\mu^{a}(x)$ 的微商．

将正则 Noether 恒等式用于色动力学，也可得到相似的结果[19]．

对含第二类约束的系统，出现在总 Hamilton 量中与第二类约束相联系的 Lagrange 乘子，可由系统的正则 Hamilton 量和第二类约束的性质来确定．但是，在含第一类约束的系统中，出现在扩展 Hamilton 量中与第一类约束相联系的 Lagrange 乘子是不能确定下来的，未确定的 Lagrange 乘子反映了运动方程解的任意性．综上所述，沿着约束系统运动的轨线，利用正则 Noether 恒等式，可能给出与第一类约束相联系的 Lagrange 乘子和正则变量间的关系式．这样，由正则 Noether 定理的应用，可获得系统的约束及其有关的 Lagrange 乘子更多的信息．

§3-11　正则 Noether 恒等式(非定域变换)

经典的 Noether 第二定理(相应的 Noether 恒等式)是基于位形空间中作用量在定域变换下的不变性导出的．在杨-Mills 场论[30]和规范场的共形对称性研究中[31,32]，均讨论了某些非定域变换．因此，有必要研究系统在非定域变换下的性质，在位形空间中对杨-Mills 场的讨论已经给出[33]．这里，在相空间中分析系统在一

般的非定域变换下的不变性，导致的正则 Noether 恒等式，同样有助于研究约束 Hamilton 系统的性质.

现考虑增广相空间中的非定域变换，其无穷小变换的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + R^{\mu}_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \\
\varphi^{\alpha\prime}(x') &= \varphi^{\alpha}(x) + \Delta\varphi^{\alpha}(x) = \varphi^{\alpha}(x) + \\
&\quad \int_{G} \mathrm{d}^4 y E(x,y) A^{\alpha}_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(y) \\
\pi'_{\alpha}(x') &= \pi_{\alpha}(x) + \Delta\pi_{\alpha}(x) = \pi_{\alpha}(x) + \\
&\quad \int_{G} \mathrm{d}^4 y F(x,y) B_{\alpha\sigma}\varepsilon^{\sigma}(y)
\end{aligned}\right\} \tag{3-11-1}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
& R^{\mu}_{\sigma} = r^{\mu(l)}_{\sigma}\partial_{\mu(l)},\ A^{\alpha}_{\sigma} = a^{\alpha\mu(m)}_{\sigma}\partial_{\mu(m)},\ B_{\alpha\sigma} = b^{\mu(n)}_{\alpha\sigma}\partial_{\mu(n)} \\
& r^{\mu(l)}_{\sigma} = r_{\sigma}^{\overbrace{\mu\nu\cdots\lambda}^{l}},\ a^{\alpha\mu(m)}_{\sigma} = a_{\sigma}^{\alpha\overbrace{\mu\nu\cdots\rho}^{m}},\ b^{\mu(n)}_{\alpha\sigma} = b_{\alpha\sigma}^{\overbrace{\mu\nu\cdots\delta}^{n}} \\
& \partial_{\mu(l)} = \underbrace{\partial_{\mu}\partial_{\nu}\cdots\partial_{\lambda}}_{l},\ \partial_{\mu(m)} = \underbrace{\partial_{\mu}\partial_{\nu}\cdots\partial_{\rho}}_{m},\ \partial_{\mu(n)} = \underbrace{\partial_{\mu}\partial_{\nu}\cdots\partial_{\delta}}_{n}
\end{aligned}\right\} \tag{3-11-2}$$

$r^{\mu(l)}_{\sigma}$、$a^{\alpha\mu(m)}_{\sigma}$、$b^{\mu(n)}_{\alpha\sigma}$、$E(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 均为时空坐标和正则变量的函数；$\varepsilon^{\sigma}(x)(\sigma = 1,2,\cdots,s)$ 为时空坐标的任意无穷小函数，它们及其所需的各阶微商在时空区域 G 的边界上均为0. 假设系统的正则作用量 I^{P} 在(3-11-1)式变换下不变，就有[1]

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^4 x \Big\{ & \frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi^{\alpha}}(\Delta\varphi^{\alpha} - \varphi^{\alpha}_{,\mu}\Delta x^{\mu}) + \frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}}(\Delta\pi_{\alpha} - \pi_{\alpha,\mu}\Delta x^{\mu}) + \\
& \partial_{\mu}[(\pi_{\alpha}\dot{\varphi}^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^{\mu}] + \\
& \mathrm{D}[\pi_{\alpha}(\Delta\varphi^{\alpha} - \varphi^{\alpha}_{,\mu}\Delta x^{\mu})]\Big\} = 0
\end{aligned} \tag{3-11-3}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi^{\alpha}} = -\dot{\pi}_{\alpha} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi^{\alpha}}, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}} = \dot{\varphi}^{\alpha} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi_{\alpha}} \tag{3-11-4}$$

又 $\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$；$\mathscr{H}_c$ 为系统的正则 Hamilton 量密度；H_c 为正则 Hamilton 量. 将(3-11-1)式代入(3-11-3)式，并注意到 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件得

$$\int \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi^\alpha}\left[\int \mathrm{d}^4 y E(x,y) A_\sigma^\alpha(y) \varepsilon^\sigma(y)-\varphi_{,\mu}^\alpha R_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma(x)\right]+\right.$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha}\left[\int \mathrm{d}^4 y F(x,y) B_{\alpha\sigma}(y) \varepsilon^\sigma(y)-\pi_{\alpha,\mu} R_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma(x)\right]+$$

$$\left.\mathrm{D}\left[\pi_\alpha(x) \int \mathrm{d}^4 y E(x,y) A_\sigma^\alpha(y) \varepsilon^\sigma(y)\right]\right\}=0 \qquad (3\text{-}11\text{-}5)$$

将(3-11-5)式左端(关于微分算符 A、B、R)做分部积分并利用 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件，然后将所得结果关于 $\varepsilon^\rho(z)$ 求泛函微商，得

$$\int \mathrm{d}^4 x\left\{\widetilde{A}_\rho^\alpha(z)\left[E(x,z) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi^\alpha(x)}\right]+\widetilde{B}_{\alpha\rho}(z)\left[F(x,z) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha(x)}\right]+\right.$$

$$\left.\widetilde{A}_\rho^\alpha(z)[\mathrm{D}(\pi(x) E(x,z))]\right\}-\widetilde{R}_\rho^\mu(z)\left[\varphi_{,\mu}^\alpha(z) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi^\alpha(z)}+\right.$$

$$\left.\pi_{\alpha,\mu}(z) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha(z)}\right]=0 \qquad (3\text{-}11\text{-}6)$$

式中 $\widetilde{A}_\rho^\alpha$、$\widetilde{B}_{\alpha\rho}$ 和 $\widetilde{R}_\rho^\mu$ 分别为 A_ρ^α、$B_{\alpha\rho}$ 和 R_ρ^μ 的伴随算符[25]，并称(3-11-6)式为非定域对称下的正则 Noether 恒等式，它与系统的运动方程无关. 与定域对称时不同的是，(3-11-6)式是含正则作用量泛函微商的微分和积分恒等式.

§3-12 奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量

场论中许多重要的系统均是用奇异 Lagrange 量来描述的，例如电磁场、引力场、杨-Mills 场、超对称、超引力、超弦等. 所有规范不变的系统均是用奇异 Lagrange 量来描述的. 该系统为约束 Hamilton 系统.

经典 Poincaré-Cartan 积分不变量在分析力学中占重要地位，该不变量与系统的正则方程等价，可视为动力学的一个基本原理[34]. 该不变量已推广到场论中的正规 Lagrange 量系统[20]. 有限自由度奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量在第二章中已讨论. 这里将 Poincaré-Cartan 积分不变量推广到场论中的奇异 Lagrange 系统，讨论场论中奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量的出发点与传统的不同，不是基于位形空间来研究的[35,36]，而是从场论中的正则形式作用量出发，讨论系统在增广相空间中的变换性质，要求正则约束在正则变量的定域(实质)变分(而不是总变分)下不变，导出场论中奇异 Lagrange量系统的 Poincaré-Cartan 不变量. 这样做的一个显著优点在于较方便地阐明了 Poincaré-Cartan 积分不变量与约束 Hamilton 系统正则方程间的等价性.

设场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x;\psi^\alpha,\psi^\alpha_{,\mu}) \quad (\alpha = 1,2,\cdots,n) \tag{3-12-1}$$

对奇异 Lagrange 量系统的 Hess 矩阵$[H_{\alpha\beta}]$适合

$$\det|H_{\alpha\beta}| = \det\left|\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^\alpha\,\partial\dot{\psi}^\beta}\right| = 0 \tag{3-12-2}$$

由 Legendre 变换引入场的正则共轭动量密度

$$\pi_\alpha = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^\alpha} \tag{3-12-3}$$

并定义场的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \pi_\alpha\dot{\psi}^\alpha - \mathscr{L} \tag{3-12-4}$$

于是，对场的 Lagrange 描述可过渡到 Hamilton 描述(重复指标代表求和). 对于奇异 Lagrange 量系统，因为存在(3-12-2)式，由(3-12-3)式不能全部解出 $\dot{\psi}^\alpha$ 作为正则变量 ψ^α 和 π_α 的函数. 设 Hess 矩阵$[H_{\alpha\beta}]$的秩为 $n-R$，此时正则变量间存在 R 个约束条件，即

$$\phi^0_a(x;\psi_\alpha,\pi_\alpha) = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,R) \tag{3-12-5}$$

并称这些约束为初级约束. 此约束 Hamilton 系统的正则方程为

$$\dot{\psi}^{\alpha} = \frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta \pi^{\alpha}} = \{\psi^{\alpha}, H_{\mathrm{T}}\} \tag{3-12-6a}$$

$$\dot{\pi}_{\alpha} = -\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta \psi^{\alpha}} = \{\pi_{\alpha}, H_{\mathrm{T}}\} \tag{3-12-6b}$$

式中：H_{T} 为系统的总 Hamilton 量，

$$H_{\mathrm{T}} = H + H_{1} = \int_{V} \mathrm{d}^{3}x (\mathscr{H}_{\mathrm{c}} + \lambda^{\alpha}\phi_{\alpha}^{0}) \tag{3-12-7}$$

$\lambda^{\alpha}(x)$ 为 Lagrange 乘子；$\{\cdot,\cdot\}$代表场论中的 Poisson 括号，

$$\{u, v\} = \int_{V} \mathrm{d}^{3}x \left(\frac{\delta u}{\delta \psi^{\alpha}} \frac{\delta v}{\delta \pi_{\alpha}} - \frac{\delta u}{\delta \pi_{\alpha}} \frac{\delta v}{\delta \psi^{\alpha}} \right) \tag{3-12-8}$$

系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{P}} = \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{P}} \mathrm{d}t = \int_{G} \mathrm{d}^{4}x\, \mathscr{L}^{\mathrm{P}} = \int_{G} \mathrm{d}^{4}x (\pi_{\alpha}\dot{\psi}^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}) \tag{3-12-9}$$

相空间中的正则变量为 $\psi^{\alpha}(t,x_i)$ 和 $\pi_{\alpha}(t,x_i)$. 将空间坐标 x_i 视为固定参量，相空间中的曲线族可表示为

$$\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha}(t,\theta), \quad \pi_{\alpha} = \pi_{\alpha}(t,\theta) \tag{3-12-10}$$

式中 θ 为参数. 考虑由于参数 θ 的改变所产生的增广相空间中的变换(x_i 固定)

$$\left.\begin{aligned} & t \to t' = t + \Delta t \\ & \psi^{\alpha}(t,x_i) \to \psi^{\alpha\prime}(t',x_i) = \\ & \qquad \psi^{\alpha}(t,x_i) + \Delta\psi^{\alpha}(t,x_i,\theta) \\ & \pi_{\alpha}(t,x_i) \to \pi'_{\alpha}(t',x_i) = \\ & \qquad \pi_{\alpha}(t,x_i) + \Delta\pi_{\alpha}(t,x_i,\theta) \end{aligned}\right\} \tag{3-12-11}$$

其中 θ 适合

$$\psi^{\alpha\prime}(t,x_i,0) = \psi^{\alpha}(t,x_i), \quad \pi'_{\alpha}(t,x_i,0) = \pi_{\alpha}(t,x_i) \tag{3-12-12}$$

在(3-12-11)式变换下，对于小参量 θ，正则作用量(3-12-9)式的变更为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\Delta\theta = \int_G \mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^a}\,\delta\psi^a + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_a}\,\delta\pi_a\right) +$$

$$\int_G \mathrm{d}^4x\left\{\partial_\mu[(\pi_a\psi^a - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^\mu] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a\delta\psi^a)\right\} \tag{3-12-13}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^a} = -\dot{\pi}_a - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\psi^a} \tag{3-12-14a}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_a} = \dot{\psi}^a - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi_a} \tag{3-12-14b}$$

而定域变分 $\delta\psi^a$ 和 $\delta\pi_a$ 与总变分 $\Delta\psi^a$ 和 $\Delta\pi_a$ 的关系为

$$\delta\psi^a = \Delta\psi^a - \psi^a_{,\mu}\delta x^\mu = \Delta\psi^a - \psi^a_{,0}\Delta x^0 \tag{3-12-15a}$$

$$\delta\pi_a = \Delta\pi_a - \pi_{a,\mu}\delta x^\mu = \Delta\pi_a - \pi_{a,0}\Delta x^0 \tag{3-12-15b}$$

(3-13-13)式又可化为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\Delta\theta = \int_G \mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^a}\,\delta\psi^a + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_a}\,\delta\pi_a\right) +$$

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\pi_a\Delta\psi^a - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Delta t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{3-12-16}$$

由于约束 Hamilton 系统的正则变量受约束条件(3-12-5)式的限制，所以正则变量是不独立的，变换(3-12-11)式中的 $\Delta\psi^a$ 和 $\Delta\pi_a$ 不能是任意的. 假设由(3-12-11)式变换所决定的定域变分 $\delta\psi^a$ 和 $\delta\pi_a$ 适合

$$\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\psi^a}\,\delta\psi^a + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_a}\,\delta\pi_a = 0 \tag{3-12-17}$$

用 Lagrange 乘子 $\lambda^a(x)$ 乘(3-12-17)式并对 a 求和，再在区域 G 上积分，并将所得结果与(3-12-16)式结合，利用约束 Hamilton 系统的正则方程(3-12-6)式得

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\delta\theta = \int_V \mathrm{d}^3x(\pi_a\Delta\psi^a - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Delta t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{3-12-18}$$

在变量 t、ψ^a、π_a 张成的增广相空间中，取一条满足约束条件(3-12-5)式的封闭曲线 C_1，由于存在约束条件(3-12-5)式，封闭曲

线 C_1实际上是在某子空间 Γ_p 中. 设封闭曲线 C_1的方程为

$$t_1 = t_1(\theta),\ \psi_1^\alpha = \psi_1^\alpha(t,\theta),\ \pi_{\alpha 1} = \pi_{\alpha 1}(t,\theta) \tag{3-12-19}$$

这里 $\theta=0$和 $\theta=l$ 代表闭曲线 C_1上的同一点. 过 C_1上的任一点，有一条适合运动方程(3-12-6)式的"轨线"，过 C_1上每一点的"轨线"构成一"轨线管"，即

$$\psi^\alpha = \psi^\alpha(t,\theta),\ \pi_\alpha = \pi_\alpha(t,\theta) \tag{3-12-20}$$

式中

$$\psi^\alpha(t,0) = \psi^\alpha(t,l),\ \pi_\alpha(t,0) = \pi_\alpha(t,l) \tag{3-12-21}$$

在这个"轨线管"上任取另一条封闭曲线 C_2，使它包围"轨线管"，并和"轨线管"的母线仅相交一次. 闭曲线 C_2的方程为

$$t_2 = t_2(\theta),\ \psi_2^\alpha = \psi_2^\alpha(t,\theta),\ \pi_{\alpha 2} = \pi_{\alpha 2}(t,\theta) \tag{3-12-22}$$

将(3-12-18)式在$[0,l]$上沿闭曲线 C_1和 C_2积分，得

$$\oint_{C_1}\int \mathrm{d}^3x(\pi_\alpha\Delta\psi^\alpha - \mathscr{H}_c\Delta t) =$$

$$\oint_{C_2}\int_V \mathrm{d}^3x(\pi_\alpha\Delta\psi^\alpha - \mathscr{H}_c\Delta t) = \mathrm{inv} \tag{3-12-23}$$

这样就得到了对增广相空间中由(3-12-5)式决定的约束超曲面中的任一封闭曲线 C. C 沿约束系统的"轨线管"的移动和变形时，沿 C 的积分(3-12-23)式是一不变量 J，并称 J 为场论中奇异 Lagrange量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量，且

$$J = \oint_C\int_V \mathrm{d}^3x(\pi_\alpha\Delta\psi^\alpha - \mathscr{H}_c\Delta t) \tag{3-12-24}$$

将整个空间区域 V 分成许多小格子，第 i 个小格子的体积元记为 $\Delta V(i)$；场量 $\psi^\alpha(x)$ 在 $\Delta V(i)$ 中的平均值为 $\psi_i^\alpha(t)$，对应于 $\psi_i^\alpha(t)$ 的正则共轭动量记为 $p_\alpha^i(t)$. 由于 $p_\alpha^i(t) = \pi_\alpha^i\Delta V(i)$[37] (对 i 不求和)，于是，离散后(3-12-24)式可表示为

$$J = \oint_C(p_\alpha^i\Delta\psi_i^\alpha - H_c\Delta t) \tag{3-12-25}$$

式中 $\psi_i^\alpha(t)$ 对应于经典力学中的广义坐标. 当 $\Delta V(i)\to 0$ 时，$\psi_i^\alpha(t)$

$\to \psi^{\alpha}(x), \pi_{\alpha}^{i}(t) \to \pi_{\alpha}(x)$，(3-12-25)式就过渡到(3-12-24)式. 这样，就不难将离散系统的结果[38]推广到场论中. 由类似讨论可知，设动力学系统所受的正则约束为(3-12-5)式，其约束系统的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi}^{\alpha} &= F^{\alpha}(x;\psi^{\alpha},\pi_{\alpha}) \\ \dot{\pi}_{\alpha} &= G_{\alpha}(x;\psi^{\alpha},\pi_{\alpha})\end{aligned}\right\} \tag{3-12-26}$$

那么，方程组(3-12-26)式为约束 Hamilton 系统的正则方程，它与(3-12-24)式为不变量是等价的.

当 $\Delta t=0$时，积分不变量(3-12-24)式化为

$$J_1 = \oint_C \int_V \mathrm{d}^3 x \ \pi_{\alpha}\,\delta\psi^{\alpha} \tag{3-12-27}$$

利用 Stokes 定理，(3-12-27)式可化为绝对积分不变量

$$J_1 = \int_S \int_V \mathrm{d}^3 x \ \delta\psi^{\alpha}\,\delta\pi_{\alpha} \tag{3-12-28}$$

式中 S 为封闭曲线 C 所围成的曲面. 与正规 Lagrange 量系统绝对积分不变量[20]的不同点在于 $\delta\psi^{\alpha}$ 和 $\delta\pi_{\alpha}$ 需适合(3-12-17)式(当 $\Delta t=0$时，定域变分和总变分一致).

§ 3-13 正则变换

离散奇异 Lagrange 量系统的正则变换[36]可推广到场论中的奇异 Lagrange 量系统. 设动力学系统所受的初级约束为(3-12-5)式，其运动方程为(3-12-6)式. 通过变量代换，使原有正则变量 ψ^{α} 和 π_{α} 变为新的正则变量 $\bar{\psi}^{\alpha}$ 和 $\bar{\pi}_{\alpha}$. 一个变换

$$\bar{\psi}^{\alpha} = Q^{\alpha}[x;\psi^{\alpha},\pi_{\alpha}], \ \bar{\pi}_{\alpha} = P_{\alpha}[x;\psi^{\alpha},\pi_{\alpha}] \tag{3-13-1}$$

如果使约束 Hamilton 系统的正则方程的形式不变，则(3-13-1)式称为正则变换.

下面给出变换(3-13-1)式为正则变换的条件，并指出它与

Poincaré-Cartan 积分不变量的联系.

设约束 Hamilton 系统的运动方程(3-12-6)式，如果在(3-13-1)式变换下，存在两个泛函 $\bar{H}_c$ 和 G，使得

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\pi_\alpha \Delta\psi^\alpha - \mathscr{H}_c\Delta t) = \int_V \mathrm{d}^3x(\bar{\pi}_\alpha \Delta\bar{\psi}^\alpha - \bar{\mathscr{H}}_c \Delta t) + \Delta G \qquad (3\text{-}13\text{-}2)$$

那么，(3-13-1)式为正则变换，G 为相应的母泛函.

事实上，取增广相空间中位于 Γ_P 内的任一封闭曲线 C，由(3-13-2)式有

$$\oint_C \left[\int_V \mathrm{d}^3x(\pi_\alpha \Delta\psi^\alpha - \mathscr{H}_c \Delta t) - \int_V \mathrm{d}^3x(\bar{\pi}_\alpha \bar{\psi}^\alpha - \bar{\mathscr{H}}_c \Delta t)\right] = 0 \qquad (3\text{-}13\text{-}3)$$

设 $\bar{C}$为 C 经过(3-13-1)式变换而得到的封闭曲线，由(3-13-3)式有

$$\oint_C \int_V \mathrm{d}^3x(\pi_\alpha \Delta\psi^\alpha - \mathscr{H}_c \Delta t) = \oint_{\bar{C}} \int_V \mathrm{d}^3x(\bar{\pi}_\alpha \Delta\bar{\psi}^\alpha - \bar{\mathscr{H}}_c \Delta t) \qquad (3\text{-}13\text{-}4)$$

由于 ψ^α 和 π_α 适合正则方程(3-12-6)式，(3-13-4)式左端在封闭曲线 C 沿(3-12-6)式的解所确定的动力学"轨线管"上移动(和变形)时不变，左端恰为 Poincaré-Cartan 积分不变量；相应的(3-13-4)式的右端也在 $\bar{C}$沿(3-13-1)式所得的"轨线管"上移动时不变. 变换后的"轨线"由一阶微分方程确定. 由于(3-13-4)式右端对变换后的新变量而言仍为 Poincaré-Cartan 积分不变量，根据前面的讨论，变换后的"轨线"必适合 Hamilton 系统的正则方程. 也就是说，(3-12-1)式的变换为正则变换.

因母泛函取定的不同，正则变换可以有不同的形式. 例如：设母泛函为 $G_1[t;\psi^\alpha,\bar{\psi}^\alpha]$，则有

$$\pi_\alpha = \frac{\delta G_1}{\delta \psi^\alpha},\ \bar{\pi}_\alpha = -\frac{\delta G_1}{\delta \bar{\psi}^\alpha},\ \bar{H}_c = H_c + \frac{\partial G_1}{\partial t} \qquad (3\text{-}13\text{-}5)$$

设母泛函为 $G_2[t;\psi^\alpha,\bar{\pi}_\alpha]$，则有

$$\pi_\alpha = \frac{\delta G_2}{\delta \psi^\alpha},\ \bar{\psi}^\alpha = \frac{\delta G_2}{\delta \bar{\pi}_\alpha},\ \bar{H}_c = H_c + \frac{\partial G_2}{\partial t} \qquad (3\text{-}13\text{-}6)$$

如果母泛函 G_1或 G_2为积分形式，其被积函数含空间坐标的微商，上述关系(3-13-5)式或(3-13-6)式为一微分方程组，当被积函数不含空间坐标微商时，它们可化为代数方程组. 一般来说，(3-13-5)式或(3-13-6)式为泛函微分方程组. 例如积分微分方程组，对(3-13-5)式的第一组方程解出 $\bar{\psi}^\alpha$(对(3-13-6)式的第一组方程解出 $\bar{\pi}_\alpha$)，将所得结果代入其中的第二组方程，就求得新的正则变量作为旧的正则变量的泛函.

现考虑正则变换

$$\bar{\psi}^\alpha = \psi^\alpha + \delta\psi^\alpha,\ \bar{\pi}_\alpha = \pi_\alpha + \delta\pi_\alpha \qquad (3\text{-}13\text{-}7)$$

由于

$$G_2^0[\psi^\alpha,\bar{\pi}_\alpha] = \int d^3x \psi^\alpha \bar{\pi}_\alpha \qquad (3\text{-}13\text{-}8)$$

产生一恒等变换，因此母泛函可写为

$$G_2[t;\psi^\alpha,\bar{\pi}_\alpha] = \int d^3x \psi^\alpha \bar{\pi}_\alpha + \varepsilon G'(t;\psi^\alpha,\bar{\pi}_\alpha) \qquad (3\text{-}13\text{-}9)$$

式中 ε 为小参量. 由(3-13-6)式有

$$\delta\psi^\alpha = \varepsilon \frac{\delta G'}{\delta \pi_\alpha},\ \delta\pi_\alpha = -\varepsilon \frac{\delta G'}{\delta \psi^\alpha} \qquad (3\text{-}13\text{-}10)$$

参 考 文 献

[1] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1993

[2] Steinhardt P J. Ann Phys (N Y)，1990，128：425

[3] Regge T，Teitelboim C. Phys Lett，1994，B52：101

[4] Gervals J L，Sakita B，Wadia S. Phys Lett，1976，B63：55
[5] Wadia S. Phys Rev，1977，D15：3615
[6] He B，Li Z P（李子平）. Commun Theor Phys，1995，23：371
[7] 李子平. 高能物理与核物理，1996，20：698
[8] Yang C N，Mills R L. Phys Rev，1954，96：191
[9] 戴元本. 相互作用的规范理论. 北京：北京科学出版社，1987
[10] 朱沛臣. 物理学进展，1991，11：483
[11] Lerda A. Anyons. Berlin：Springer-Verlag，1992
[12] Wilezek F，Zee A. Phys Rev Lett，1983，51：2250
[13] Kim J K，Kim W T，Shin H. J Phys，1994，A27：6067
[14] Dunne G. Self-dual Chem-Şimons Theories. Berlin：Springer-Verlag，1995
[15] Castellani L. Ann Phys（N Y），1983，143：357
[16] Senechal D. Phys Lett，1992，B297：138
[17] Li Z P（李子平），Li X. Int J Theor Phys，1991，30：225
[18] Li Z P（李子平）. Phys Rev，1994，E50：876
[19] 李子平. 物理学报，1992，41：710
[20] Mušicki D. J Phys，1978，A11：39
[21] 李子平，廖理几. 群论及其在物理学中的应用. 乌鲁木齐：新疆人民出版社，1988
[22] Haken H. Quantum Field Theory of Solids. Amsterdam：North-Holland，1976
[23] Rodriguez-Nunez J J. Int J Theor Phys，1990，29：467
[24] Li Z P（李子平）. Int J Theor Phys，1996，35：1353
[25] Li Z P（李子平）. Int J Theor Phys，1987，26：853
[26] 李子平. 北京工业大学学报，1990，16（3）：1
[27] Li Z P（李子平）. Int J Theor Phys，1994，33：1207
[28] Costa M E V，Girotti H O，Simões T J M. Phys Rev，1985，D32：405
[29] Li Z P（李子平）. Int J Theor Phys，1993，32：201
[30] 邝宇平，易余萍. 高能物理与核物理，1980，4：286
[31] Fradkin E S，Palchik M Ya. Phys Lett，1984，B147：86

[32] Palchik M Ya. Yad Fiz，1985，42：522
[33] 李子平. 高能物理与核物理，1995，19：320
[34] Gantmacher F. Lecture in Analytical Mechanics. Moscow：Mir，1970
[35] Benavent F，Gomis J. Ann Phys (N Y)，1979，118：476
[36] Dominici D，Gomis J. J Math Phys，1980，21：2124
[37] Lurié D. Particles and Fields. New York：John Wiley，1968
[38] Li Z P (李子平)，Li X. Int J Theor Phys，1990，29：765

第四章

算符形式正则量子化

本章讨论奇异 Lagrange 量系统的算符形式正则量子化，说明 Dirac 括号量子化程序. 对含第二类约束的系统通过 Dirac 括号与量子括号对应来实现系统的量子化. 对含第一类约束的系统，相应于每一个第一类约束，选取适当的规范条件，使全部第一类约束和规范条件一起变为第二类约束；然后，再按第二类约束系统进行量子化. 对一些具体的系统分析了它们的正则结构，并给出其正则算符量子化形式；最后，讨论了自由电磁场、旋量场、旋量电动力学、Chern-Simons 物质场、自对偶场以及杨-Mills 场的算符形式正则量子化.

§ 4-1 Dirac 量子化

一个用奇异 Lagrange 量描述的系统（包括所有定域不变理论）在相空间中存在固有约束，即为约束 Hamilton 系统. 由于存在约束，在初等量子力学中对系统作量子化的方法不能直接用于该系统.

约束 Hamilton 系统的量子化问题关键在于处理约束，其中最直接的方法就是解约束方程，分离真正的独立正则变量（约化相空间）；然后再对独立的物理自由度量子化. 此方法虽然原则上可行，但是对实际的约束系统，在处理上常常是很困难的.

另一种方法是量子化所有动力学变量，用约束条件来挑选物理态. 这种对约束系统的 Hamilton 形式量子化的基础是由 Dirac 首先奠定的[1]，这是一种算符形式的正则量子化方案.

至今对约束 Hamilton 系统量子化的认识已有了相当的进展.

Faddeev 提出了对含第一类约束系统的路径积分量子化方案[2]，其后 Senjanovic 给出了同时含第一类约束和第二类约束的路径积分量子化方案[3]. 相对论性协变形式的正则量子化方法是由 Fradkin 及其合作者给出的[4~8]，通常将这种方法称为 BFV 量子化方法. 在此量子化方法中至关重要的是 BRST(Becchi-Rouet-Stora-Tyutin)对称和 BRST 荷. 这方面无论在经典理论还是路径积分理论以及算符理论中均开展了大量研究[9,10]. 对奇异 Lagrange 量系统，除 Hamilton 形式量子化外，还存在其他形式的量子化方案，其中最著名的 Lagrange 量子化方案是所谓 Faddeev-Popov 量子化方法[11,12]，另外的 Lagrange 量子化规则也已给出[13~15]. 其中 BV (Batalin-Vilkovisky)量子方案日益受到人们的关注[14~16]. 本章初步介绍奇异 Lagrange 系统的算符形式正则量子化(Dirac 括号量子化)，下一章讨论路径积分量子化.

基本粒子分 Bose 子和 Fermi 子. Bose 场的量子化场量适合对易关系，而 Fermi 场的量子化则是用反对易关系. 对易关系中的量的经典对应为普通的数，即经典的数(C-数). 本节讨论 C-数描述的系统的 Dirac 量子化.

所谓某个系统的量子化就是要将该系统的经典理论过渡到量子理论. 有限自由度的正规 Lagrange 量系统过渡到 Hamilton 体制后，其正则量子化(正则算符量子化形式)是通过以下几个步骤来实现的：

(1)系统的量子态是用 Hilbert 空间中的态矢 Ψ 来描述.

(2)经典理论中任一物理量 $F(q,p)$，在量子理论中相应于 Hilbert 空间中一算符 $\hat{F}=\hat{F}(\hat{q},\hat{p})$，其坐标和动量算符 $\hat{q}$ 和 $\hat{p}$ 适合下列正则对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{q}^a,\hat{p}_b]_-=\mathrm{i}\delta^a_b\\&[\hat{q}^a,\hat{q}^b]_-=[\hat{p}_a,\hat{p}_b]_-=0\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}1\text{-}1)$$

(3)态矢 Ψ 随时间的演化满足Schrödinger方程，即

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \tag{4-1-2}$$

其中算符$\hat{H}$是量子 Hamilton 量，它相应于经典正则 Hamilton 量 H_c.

物理量$\hat{F}$在态$|\rangle$中的平均值为$\langle|\hat{F}|\rangle = \langle\hat{F}\rangle$(这里用 Dirac 记号来表征量子态). 由 Schrödinger 方程得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{F}\rangle = -\mathrm{i}\langle[\hat{F},\hat{H}]\rangle \tag{4-1-3}$$

由此可见，只要将相空间中的函数 F 过渡到量子可观察算符$\hat{F}$，并将经典 Poisson 括号用量子对易式，按

$$\{A,B\} \to -\mathrm{i}[\hat{A},\hat{B}]_- \tag{4-1-4}$$

方式代替，那么经典的正则方程形式上就变为(4-1-3)式. 式中

$$[\hat{A},\hat{B}]_- = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

对正规 Lagrange 量系统上述正则量子化的算符形式在初等量子力学中是人们熟知的. 对奇异 Lagrange 量系统，在相空间存在固有约束 $\phi_a(q,p)=0$，过渡到量子理论中其相应的算符方程为

$$\hat{\phi}_a(\hat{q},\hat{p}) = 0 \tag{4-1-5}$$

在一些实际物理系统中如果将经典理论中的约束条件过渡到量子理论时视为算符方程，将会导致与对易关系(4-1-1)式不相容，例如电磁场的量子化就出现这种情况. 于是，约束条件量子化后，将它作为对物理 C 态的挑选. 也就是说(4-1-5)式作用在物理态$|\rangle_P$ 上为 0.

$$\hat{\phi}_a(\hat{q},\hat{p})|\rangle_P = 0 \tag{4-1-6}$$

适合这种要求的态矢量称为物理态矢量，记为$|\rangle_P$. 全部物理态矢量的集合构成一个物理态子空间.

设系统仅存在两个约束，即

$$\phi_1(q,p) = 0, \quad \phi_2(q,p) = 0 \tag{4-1-7}$$

相应于这些约束的量子力学表述为

$$\phi_1(\hat{q},\hat{p})|\rangle_P = 0, \quad \phi_2(\hat{q},\hat{p})|\rangle_P = 0 \tag{4-1-8}$$

由(4-1-8)式有

$$[\phi_1(\hat{q},\hat{p}),\phi_2(\hat{q},\hat{p})]_-|\rangle_P = 0 \tag{4-1-9}$$

将(4-1-9)式回到经典的对应式可见，约束 ϕ_1 和 ϕ_2 为第一类约束.

由此可见，当系统存在第二类约束时，如果采用类似于(4-1-4)式的对应关系，那么在经典力学和量子力学对应上将会出现矛盾. 为了克服这个困难，Dirac 引进了所谓Dirac 括号. 由于第二类约束的 Dirac 括号为 0，对含第二类约束的系统，就采用 Dirac 括号与量子括号(对易式)相对应. 这样，无论是第一类约束还是第二类约束，经典理论和量子理论的对应关系就不再出现不自洽的情况了.

当系统仅含第二类约束时，用(q,p) 表达的量子化规则(Schrödinger 表象)为

$$q^i \to \hat{q}^i, \quad p_i \to \hat{p}_i \tag{4-1-10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{q}^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{p}_i = 0 \tag{4-1-10b}$$

$$[\hat{q}^j, \hat{q}^k]_- = \mathrm{i}\{q^j,q^k\}_D|_{q\to\hat{q},p\to\hat{p}} \tag{4-1-11a}$$

$$[\hat{p}_j, \hat{p}_k]_- = \mathrm{i}\{p_j,p_k\}_D|_{q\to\hat{q},p\to\hat{p}} \tag{4-1-11b}$$

$$[\hat{q}^j, \hat{p}_k]_- = \mathrm{i}\{q^j,p_k\}_D|_{q\to\hat{q},p\to\hat{p}} \tag{4-1-11c}$$

设第二类约束 $\theta_m(q,p) = 0$，根据 Dirac 括号的定义，可将(4-1-11) 式写为

$$[\hat{q}^j, \hat{q}^k]_- = \mathrm{i}\frac{\partial\theta_m}{\partial p_j}c_{mn}^{-1}(q,p)\frac{\partial\theta_n}{\partial p_k}\bigg|_{q\to\hat{q},p\to\hat{p}} \tag{4-1-12a}$$

$$[\hat{p}_j, \hat{p}_k]_- = \mathrm{i}\frac{\partial\theta_m}{\partial q^j}c_{mn}^{-1}(q,p)\frac{\partial\theta_n}{\partial q^k}\bigg|_{q\to\hat{q},p\to\hat{p}} \tag{4-1-12b}$$

$$[\hat{q}^j, \hat{p}_k]_- = \mathrm{i}\left[\delta_k^j - \frac{\partial\theta_m}{\partial p_j}c_{mn}^{-1}(q,p)\frac{\partial\theta_n}{\partial q_k}\right]\bigg|_{q\to\hat{q},p\to\hat{p}} \tag{4-1-12c}$$

式中 c_{mn}^{-1} 为$[\{\theta_m,\theta_n\}]$的逆矩阵的矩阵元. $\hat{q}^i$ 和 $\hat{p}_i$ 的时间演化适合下列 Heisenberg 方程：

$$\dot{\hat{q}}^i = \mathrm{i}[\hat{H}_c(\hat{q},\hat{p}),\hat{q}^i]_- \tag{4-1-13a}$$

$$\dot{\hat{p}}_i = \mathrm{i}[\hat{H}_c(\hat{q},\hat{p}),\hat{p}_i] \qquad (4\text{-}1\text{-}13\mathrm{b})$$

在上述量子化条件中，从经典的可观察量过渡到量子可观察量存在算符的次序问题，经典物理量不对应于唯一的量子物理量.值得注意的是，当 Dirac 括号后的结果仍然依赖于(q,p)时，这样的量子化条件一般是难于使用的，例如杨-Mills 理论的量子化就出现这种情况.

当系统同时含第一类约束和第二类约束时，可将其中的约束做线性组合，使尽可能多的约束归到第一类约束.在场论中，可能出现约束和约束的空间微商的线性组合转变为第一类约束.

第一类约束与系统的规范自由度相联系.对每一个第一类约束，相应的选取一个规范条件，以固定规范自由度.前面已经讨论了固定规范问题，这里做进一步说明.设系统所含的第一类约束为

$$\Lambda_a(q,p) \approx 0 \qquad (a=1,2,\cdots,m) \qquad (4\text{-}1\text{-}14)$$

对每一个第一类约束，需选取相应的规范条件，即

$$\Omega_a(q,p) \approx 0 \qquad (a=1,2,\cdots,m) \qquad (4\text{-}1\text{-}15)$$

原则上规范条件至少要满足如下一些要求[17]：

(1)规范条件必须固定规范，即当 q 和 p 适合规范条件(4-1-15)式，那么经规范变换后的 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$ 将不再满足(4-1-15)式.

(2)规范条件必须与系统的运动方程不相矛盾，即规范条件的选取必须与系统的运动方程相自洽.

(3)规范条件必须为系统动力学演化(运动方程和初始条件)所保持，即规范条件随时间演化是稳定的，规范(约束)条件(与约束条件一样)适合(约束的)相容性条件.

(4)规范条件必须是可以达到的.从 q 和 p 不满足规范条件(4-1-15)式出发，必须能找到一规范变换，将 q 和 p 变为 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$，使得 $\Omega_a(\bar{q},\bar{p})\approx 0$.

(5)规范条件必须适合

$$\det|\{\Omega_a,\Lambda_b\}| \neq 0 \qquad (4\text{-}1\text{-}16)$$

于是，由 Ω_a 的相容性条件可知，Hamilton 量中与第一类相联系的 Lagrange 乘子就完全确定了. 这样选取的规范条件，可将第一类约束均转变为第二类约束，等等.

对同时含第一类约束和第二类约束的系统，相应于每一个第一类约束，需选取适当的规范条件使其对全部约束来说(包括规范约束)已成为第二类约束了，这样就可按仅含第二类约束的情况来量子化.

在约束 Hamilton 系统量子化结果中，不依赖于规范条件的选取，即不同规范下量子化结果是等价的[18].

以上说明的约束系统的 Dirac 括号量子化方法，可以直接推广到场论中的奇异 Lagrange 量系统. 如果该系统同时存在第一类约束和第二类约束，则需对第一类约束引入规范条件使其变为只含第二类约束的情况来处理.

在 Schrödinger 表象中，算符与时间无关，并且满足如下的对易关系：

$$[\hat{\varphi}^\alpha(t,\boldsymbol{x}),\ \hat{\varphi}^\beta(t,\boldsymbol{y})]_- = \mathrm{i}\{\hat{\varphi}^\alpha(t,\boldsymbol{x}),\ \hat{\varphi}^\beta(t,\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{D}}\big|_{\varphi^\alpha\to\hat{\varphi}^\alpha} \tag{3-1-17a}$$

$$[\hat{\pi}_\alpha(t,\boldsymbol{x}),\ \hat{\pi}_\beta(t,\boldsymbol{y})]_- = \mathrm{i}\{\pi_\alpha(t,\boldsymbol{x}),\pi_\beta(t,\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{D}}\big|_{\pi_\alpha\to\hat{\pi}_\alpha} \tag{3-1-17b}$$

$$[\hat{\varphi}^\alpha(t,\boldsymbol{x}),\ \hat{\pi}_\beta(t,\boldsymbol{y})]_- = \{\varphi^\alpha(t,\boldsymbol{x}),\pi_\beta(t,\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{D}}\big|_{\varphi^\alpha\to\hat{\varphi}^\alpha,\pi_\alpha\to\hat{\pi}_\alpha} \tag{3-1-17c}$$

如果这些关系式的右端含有场算符，这样的量子化条件一般是不便于使用的，例如在 Coulomb 规范下非 Abel 规范场的量子化问题就出现这种情况. 然而，用路径积分(或泛函积分)量子化就无此困难. 在规范场论中用路径积分表述比正则算符形式表述更方便，例如导出 Feynman 规则、给出 Ward-Takahashi 恒等式的证明，以及非微扰现象的研究等. 路径积分量子化[19]以及 BFV 路径积分形式将在下一章中讨论. 其他形式的量子化方案有随机量子化形

式[20]. 采用不定度规形式来实现对系统的量子化[21]，在电磁场量子化中早已采用. 近来 Faddev-Jackiw 还提出一种有别于 Dirac 量子化的新的量子化方案[22].

§4-2 含 Fermi 变量的系统

在旋量场(Fermi 场)的量子化中，场量作为算符适合反对易量子化规则. 场算符的经典对应为反对易 C-数，即 Grassmann 数.

Grassmann 代数是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间，数乘和加法运算具有双线性. 抽象的有限维 Grassmann 代数 G_n 由 n 个元素 $\eta_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$生成，它们满足

$$[\eta_\alpha,\eta_\beta]_+ = \eta_\alpha\eta_\beta + \eta_\beta\eta_\alpha = 0\ (\alpha,\beta = 1,2,\cdots,n) \tag{4-2-1}$$

即 η_α 和 η_β 之间是反对易的；G_n 为 2^n 维线性空间，此空间的基底可取为

$$1,\eta_\alpha,\eta_\alpha\eta_\beta(\alpha<\beta),\cdots,\eta_1\eta_2\cdots\eta_n \tag{4-2-2}$$

G_n 中任一元素可写为

$$u(\eta) = \omega_0 + \omega_\alpha\eta_\alpha + \omega_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta + \cdots + \omega_{12\cdots n}\eta_1\eta_2\cdots\eta_n \tag{4-2-3}$$

式中：$\omega_0,\omega_\alpha,\cdots,\omega_{12\cdots n}\in\boldsymbol{C}$；$u(\eta)$ 至多是 2^n 项之和. 由于(4-2-1)式 $\eta_\alpha\eta_\alpha=\eta_\alpha^2=0$，因此，(4-2-3)式中同一个 η_α 不会出现两次. 空间 G_n 可分为两个子空间 $G_n^{(0)}$和 $G_n^{(1)}$之和，即

$$G_n = G_n^{(0)} + G_n^{(1)} \tag{4-2-4}$$

式中：$G_n^{(0)}$由 G_n 的偶元素组成，即(4-2-3)式中仅含偶数个 η_α 之积的那些元素；$G_n^{(1)}$是 G_n 的奇元素(奇数个 η_α 之积)所构成的子空间. 对偶元素和奇元素分别定义它们的 Grassmann 宇称，偶元素 u 其 Grassmann 宇称为 $n_u=0$；奇元素 u 其 Grassmann 宇称 $n_u=1$. 于是就有

$$uv = (-1)^{n_u n_v}vu \tag{4-2-5}$$

$G_n^{(0)}$中的元素为 Bose 型，$G_n^{(1)}$中的元素为 Fermi 型.

对(4-2-3)式求微商，除遵从一般的求导规则外，还需考虑到不同 η_α 之间的反对易关系，并且对 Grassmann 数还应区分左微商 $\partial_l u/\partial\eta_\alpha$ 或右微商 $\partial_r u/\partial\eta_\alpha$. 左微商和右微商分别有两种微分表达式，即

$$\mathrm{d}u(\eta) = \mathrm{d}\eta_\alpha \frac{\partial_r u}{\partial \eta_\alpha}, \ \mathrm{d}u(\eta) = \frac{\partial_l u}{\partial \eta_\alpha}\mathrm{d}\eta_\alpha \tag{4-2-6}$$

一般来说，左、右微商是不同的，它们之间的关系为

$$\frac{\partial_l u}{\partial \eta_\alpha} = -(-1)^{n_u}\frac{\partial_r u}{\partial \eta_\alpha} \tag{4-2-7}$$

G_n 中任意两个元素 u_1 和 u_2 之积的微商规则为

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha}(u_1 u_2) = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha}u_1\right)u_2 + (-1)^{n_{u_1}}u_1\left(\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha}u_2\right) \tag{4-2-8}$$

下面考虑同时由C- 数 q^i 和 Grassmann 数 η^α 描述的动力学系统. 设系统 的 Lagrange 量为 $L(q^i,\dot{q}^i,\eta^\alpha,\dot{\eta}^\alpha)$，则系统的 Euler-Lagrange 方程为

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \ \dot{\pi}_\alpha = \frac{\partial_l L}{\partial \eta^\alpha} \tag{4-2-9}$$

其中

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \ \pi_\alpha = \frac{\partial_l L}{\partial \dot{\eta}^\alpha} \tag{4-2-10}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c = \dot{q}^i p_i + \dot{\eta}^\alpha \pi_\alpha - L \tag{4-2-11}$$

类似地，根据 Lagrange 量的 Hess 矩阵 $\left[\frac{\partial_r^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{Q}^i \partial \dot{Q}^j}\right]$ $(Q^i = (q^i, \eta^i))$ 是否退化，来区分正规 Lagrange 量和奇异 Lagrange 量. 对正规 Lagrange量系统，其正则方程为

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i}, \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} \tag{4-2-12a}$$

$$\dot{\eta}^\alpha = \frac{\partial_r H_c}{\partial \pi_\alpha} = -\frac{\partial_l H_c}{\partial \pi_\alpha}, \ \dot{\pi}_\alpha = -\frac{\partial_l H_c}{\partial \eta^\alpha} \tag{4-2-12b}$$

相空间由变量(q^i, p_i, η^a, π_a)张成. C-数变量可视为 Grassmann 代数中的偶元素.

含 Grassmann 变量的 Poisson 括号需略加修改. 设 F 和 G 均为 Grassmann 变量 η^a 和 π_a 的函数, F 与 G 的 Poisson 括号为

$$\{F, G\} = \frac{\partial_r F}{\partial \eta^a}\frac{\partial_l G}{\partial \pi_a} - (-1)^{n_F n_G}\frac{\partial_r G}{\partial \eta^a}\frac{\partial_l F}{\partial \pi_a} \tag{4-2-13}$$

式中 n_F 和 n_G 分别为 F 和 G 的 Grassmann 宇称. 此 Poisson 括号具有通常 Poisson 括号相似的性质, 但要注意相应的 Grassmann 宇称. 含 Grassmann 变量正规 Lagrange 量系统的量子化规则为

$$\mathrm{i}\{F, G\} \rightarrow \hat{F}\hat{G} - (-1)^{n_F n_G}\hat{G}\hat{F} \tag{4-2-14}$$

式中右端 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 分别为 F 和 G 对应的算符. 例如对于 Fermi 场, (4-2-14) 式给出反对易量子化规则.

对于同时含 C- 数和 Grassmann 数系统的 Poisson 括号, 采用 Bose-Fermi 括号(简记为 BFB)[23].

对于含 Grassmann 变量的奇异 Lagrange 系统, 过渡到 Hamilton 形式后, 在相空间存在约束. 对含第二类约束 $\theta_i (i = 1, 2, \cdots, I)$ 的系统, 类似可定义 Dirac 括号, 即

$$\{F, G\}_\mathrm{D} = \{F, G\} - \{F, \theta_i\} c_{ij}^{-1}\{\theta_j, G\} \tag{4-2-15}$$

式中

$$c_{ij}^{-1}\{\theta_j, \theta_k\} = \delta_{ik} \tag{4-2-16}$$

此 Dirac 括号具有如下性质:

$$\{F, G\}_\mathrm{D} = -(-1)^{n_F n_G}\{G, F\}_\mathrm{D} \tag{4-2-17}$$

$$\{F, GK\}_\mathrm{D} = \{F, G\}_\mathrm{D} K + (-1)^{n_F n_G} G\{F, K\}_\mathrm{D} \tag{4-2-18}$$

$$(-1)^{n_F n_K}\{F, \{G, K\}_\mathrm{D}\}_\mathrm{D} + (-1)^{n_G n_F}\{G, \{K, F\}_\mathrm{D}\}_\mathrm{D} + (-)^{n_K n_G}\{K, \{F, G\}_\mathrm{D}\}_\mathrm{D} = 0 \tag{4-2-19}$$

具有 Grassmann 变量含第二类约束的奇异 Lagrange 量系统的量子化规则为

$$i\{F,G\}_D \to \hat{F}\hat{G}-(-1)^{n_F n_G}\hat{G}\hat{F} \qquad (4\text{-}2\text{-}20)$$

对于同时含第一类约束和第二类约束的 Grassmann 数系统，像 C-数系统一样需选取规范条件，使其转化为第二类约束；然后，按第二类约束系统实现量子化.

§4-3 电磁场量子化

电磁场为矢量场，它描写自旋为 1 的光子. 电磁场四维势 A_μ 为 Bose 变量. 自由电磁场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$

式中

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \qquad (4\text{-}3\text{-}2)$$

其中电磁势 A_μ 的正则共轭动量 $\pi^\mu=-F^{0\mu}$. 系统的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c=\pi^\mu\dot{A}_\mu-\mathscr{L}=\pi_i\pi_i-A_0\partial_i\pi_i+\frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \qquad (4\text{-}3\text{-}3)$$

初级约束

$$\phi^0=\pi^0\approx 0 \qquad (4\text{-}3\text{-}4)$$

由初级约束的自洽性条件，导出次级约束

$$\phi^1=\partial_i\pi_i\approx 0 \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

次级约束 $\phi^1\approx 0$ 的自洽性条件，不产生其他新的约束. 全部约束 $\phi^0\approx 0$和 $\phi^1\approx 0$ 均为第一类约束.

Lagrange 量(4-3-1)式在 A_μ 的规范变换下是不变的. 系统仅含第一类约束，第一类约束是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换. 在 A_μ 和 $\dot{A}_\mu$ 的确定初值下，根据系统的运动方程只能把 $A_\mu(x)$ 确定到相差任意的一个规范变换. 第一类约束系

统的量子化，需选取规范条件（固定规范）.

对系统中的每一个第一类约束需引入相应的规范条件（规范约束）. 电动力学中常取 Coulomb 规范和 Lorentz 规范. 其中 Lorentz 规范条件为

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 - \partial_i A^i = 0 \tag{4-3-6}$$

这条件对约束系统的Dirac 处理不合适，这里 A_0 起着Lagrange乘子的作用，使 Lorentz 规范条件含有乘子的时间微商；另一原因是(4-3-6)式仅有一个规范条件，而系统有两个第一类约束，需有两个规范条件. 由(4-3-6)式也可看到，这个条件未能完全固定规范，它仅限制了规范变换 $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon$ 中，函数 $\varepsilon(x)$ 需适合$\partial_\mu \partial^\mu \varepsilon(x) = 0$，于是考虑 选取 Coulomb 规范. Coulomb 的规范条件为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} \approx 0 \tag{4-3-7}$$

它与系统的运动方程不矛盾. 设场 A_μ 在无穷远处足够快地趋于 0. 这样由规范变换形成的任意性就可被消除. 规范条件随时间是稳定的，(4-3-7)式的自洽性条件要求

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{A}} \approx 0 \tag{4-3-8}$$

由 $\pi^\mu = -F^{0\mu}$，有 $\pi^0 \approx 0$，又 $\boldsymbol{\pi} = -(\nabla A_0 - \dot{\boldsymbol{A}})$，利用次级约束条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} \approx 0$，结合(3-2-9) 式得

$$\nabla^2 A_0(x) \approx 0 \tag{4-3-9}$$

根据这个方程式和场的边界条件完全可以确定 $A_0(x)$，即

$$A_0(x) \approx 0 \tag{4-3-10}$$

(4-3-7)、(4-3-10)式为 Coulomb 规范下的全部规范约束条件（系统具有两个第一类约束，此处恰好有两个规范条件），并称之为辐射规范. 其辐射规范为

$$\Omega_1 = A_0 \approx 0 \tag{4-3-11}$$

$$\Omega_2 = \partial_i A_i \approx 0 \tag{4-3-12}$$

系统所具有的第一类约束，记为

$$\Lambda_1 = \pi^0 \approx 0 \tag{4-3-13}$$

$$\Lambda_2 = \partial_i \pi_i \approx 0 \tag{4-3-14}$$

规范条件(4-3-11)、(4-3-12)式不仅适合 $\det|\{\Omega,\Lambda\}| \not\approx 0$,而且也完全消除了 A_μ 的规范自由度.由于

$$\{\boldsymbol{\Omega}_1(x),\Lambda_1(y)\}_{x^0=y^0} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-3-15a}$$

$$\{\boldsymbol{\Omega}_1(x),\Lambda_2(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{4-3-15b}$$

$$\{\boldsymbol{\Omega}_2(x),\Lambda_2(y)\}_{x^0=y^0} = -\partial_i\partial_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -\nabla^2\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-3-15c}$$

$$\{\boldsymbol{\Omega}_2(x),\Lambda_1(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{4-3-15d}$$

将约束 Λ_a 和规范 $\boldsymbol{\Omega}_a$ 合起来,记为

$$\psi_i = (\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4) = (\boldsymbol{\Omega}_1,\boldsymbol{\Omega}_2,\Lambda_1,\Lambda_2)$$

并记矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的矩阵元 $G_{ij}=\{\psi_i,\psi_j\}$,于是

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-3-16}$$

可见,$\boldsymbol{G}$ 是非奇异的.

下面给出辐射规范下的 Dirac 括号.矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \\ \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4-3-17}$$

于是,辐射规范下的 Dirac 括号为

$$\{A(x),B(y)\}_{\mathrm{D}} =$$

$$\{A(x),B(y)\} - \iint \mathrm{d}\boldsymbol{z}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{z}_2 \{A(x),\psi_i(z_1)\} \cdot$$

$$G_{ij}^{-1}(z_1,z_2)\cdot\{\psi_j(z_2,B(y)\}\tag{4-3-18}$$

式中 $\psi_i=(\Omega_1,\Omega_2,\Lambda_1,\Lambda_2)$，所有括号均是“等时”的. 求出的基本的Dirac 括号为

$$\{A_\mu(x),\pi^\nu(y)\}_{\mathrm{D}}=$$

$$(\delta_\mu^\nu-\delta_\mu^0 g_0^\nu)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\partial_\mu\partial^\nu\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\tag{4-3-19a}$$

$$\{A_\mu(x),A_\nu(y)\}_{\mathrm{D}}=0\tag{4-3-19b}$$

$$\{\pi^\mu(x),\pi^\nu(y)\}_{\mathrm{D}}=0\tag{4-3-19c}$$

同时还得到

$$\{A_0(x),\pi^\nu(y)\}_{\mathrm{D}}=0\tag{4-3-20}$$

$$\{A_\mu(x),\pi^0(y)\}_{\mathrm{D}}=0\tag{4-3-21}$$

(4-3-20)、(4-3-21)式与 $A^0=\pi^0=0$ 在Dirac括号下视为强方程是一致的. 这样

$$\{A_i(x),\pi^j(y)\}_{\mathrm{D}}=\delta_i^j\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\partial_i\,\partial^j\,\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\tag{4-3-22}$$

式中右端有时称为“横向 δ-函数”.

$$\delta_{ij}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\delta_{ij}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\partial_i\partial_j\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}=$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)\tag{4-3-23}$$

相空间变量的函数 $F(A,\pi)$ 的运动方程为

$$\dot{F}=\{F,H_c\}_{\mathrm{D}}\tag{4-3-24}$$

式中 H_c 为正则 Hamilton 量. 对正则变量有

$$\dot{A}_j=\pi_j\tag{4-3-25a}$$

$$\dot{\pi}_j=\partial^i\,\partial_jA_i-\partial^i\partial_iA_j\tag{4-3-25b}$$

现在给出用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 表达的量子化条件. A_μ 和 π^μ 的算符 $\hat{A}_\mu$ 和 $\hat{\pi}^\mu$（在 Schrödinger 表象中）满足如下关系：

$$\hat{A}_\mu(x)^+=\hat{A}_\mu(x),\ \hat{\pi}^\mu(x)^+=\hat{\pi}^\mu(x)\tag{4-3-26}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A}_\mu(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\pi}^\mu(x)=0 \tag{4-3-27}$$

$$[\hat{A}_\mu(x),\ \hat{A}_\nu(y)]_-=0 \tag{4-3-28}$$

$$[\hat{\pi}^\mu(x),\ \hat{\pi}^\nu(y)]_-=0 \tag{4-3-29}$$

$$[\hat{A}_\mu(x),\ \hat{\pi}^\nu(y)]_-=\mathrm{i}(\delta_\mu^\nu-\delta_\mu^0 g_0^\nu)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\mathrm{i}\partial_\mu\partial^\nu\frac{1}{(\nabla^2)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-3-30}$$

$$\hat{\pi}^0(x)=0 \tag{4-3-31}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}(x)=0 \tag{4-3-32}$$

$$\hat{A}_0(x)=0 \tag{4-3-33}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{A}}=0 \tag{4-3-34}$$

这里约定,算符$\frac{1}{(\nabla^2)}$的意义由被作用量的Fourier展开来确定.

$$\frac{1}{(\nabla^2)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=-\int\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \tag{4-3-35}$$

(4-3-26)～(4-3-34)式中的 $\hat{A}_0(x)$ 和 $\hat{\pi}^0(x)$ 可根据约束条件从对易关系式和各种物理量的表达式中消去,剩下的 $\boldsymbol{A}(x)$ 及 $\boldsymbol{\pi}(x)$ 满足如下关系:

$$[\hat{A}_j(x),\ \hat{A}_k(y)]_-=0 \tag{4-3-36}$$

$$[\hat{\pi}_j(x),\ \hat{\pi}_k(y)]_-=0 \tag{4-3-37}$$

$$[\hat{A}_j(x),\ \hat{\pi}^k(y)]_-=\mathrm{i}\delta_j^k\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\mathrm{i}\partial_j\partial^k\frac{1}{(\nabla^2)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-3-38}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(x)=0 \tag{4-3-39}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}(x)=0 \tag{4-3-40}$$

以上仅讨论了辐射规范下电磁场的量子化,而在其他文献中还研究了采用其他规范条件进行量子化的问题[24～29]. 对不采用Dirac括号的算符形式量子化的Gupta-Bleuler理论,在量子场论

书中有讨论[30].

§4-4 旋量场量子化

旋量场描写自旋为 1/2 的粒子及其反粒子. 根据自旋和统计的关系，该粒子为 Fermi 子. 旋量场的经典场函数 $\psi(x)$ 应为Grassmann 代数中的元素. 自由旋量场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{4-4-1}$$

式中 $\psi = \psi(x)$ 和 $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0$ 均为 Grassmann 代数中的奇元素. 按它们在 Lorentz 群下的变换性质，$\psi(x)$ 为 Dirac 旋量[31]；$\bar{\psi}(x)$ 为 Dirac 共轭旋量；γ^μ 为 Dirac γ-矩阵，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{4-4-2}$$

场的 Lagrange 方程：

$$\frac{\delta_r I}{\delta\bar{\psi}} = -\ (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{4-4-3a}$$

$$\frac{\delta_r I}{\delta\psi} = -\ \bar{\psi}(\mathrm{i}\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma^\mu + m) = 0 \tag{4-4-3b}$$

式中 I 为作用量，$I = \int \mathscr{L}\mathrm{d}^4x$. Lagrange 量(4-4-1) 式是奇异的，因为其中不含 $\bar{\psi}$ 的时间微商，并且 $\mathscr{L}$ 对 $\dot{\psi}$ 的依赖是线性的.

下面过渡到 Hamilton 形式，相应 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的正则动量分别为

$$\pi_\psi = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \tag{4-4-4}$$

$$\pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} = 0 \tag{4-4-5}$$

这两个式子均不能确定 $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\bar{\psi}}$，因此初级约束分别为

$$\theta_1 = \pi_{\bar{\psi}} \approx 0 \tag{4-4-6}$$

$$\theta_2 = \pi_\psi - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \tag{4-4-7}$$

正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \dot{\psi}\pi_\psi + \dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}} - \mathscr{L} = \bar{\psi}(-i\gamma^k\partial_k + m)\psi \quad (4\text{-}4\text{-}8)$$

式中$\dot{\psi}\pi_\psi = (\partial_0\psi_a)(\pi_\psi)_a$等. 总 Hamilton 量

$$H_T = \int[\mathscr{H}_c + \lambda^1\pi_{\bar{\psi}} - \lambda^2(\pi_\psi - i\bar{\psi}\gamma^0)]d^3x \quad (4\text{-}4\text{-}9)$$

式中 $\lambda^1(x)$ 和 $\lambda^2(x)$ 为 Lagrange 乘子,它们均为奇变量. 由初级约束 θ_1 和 θ_2 的自洽性条件 $\{\theta_i, H_T\} \approx 0 (i = 1,2)$, 给出了确定 Lagrange 乘子 $\lambda^i(x)(i = 1,2)$ 的方程,且不产生次级约束. 显然,约束 θ_1 和 θ_2 为第二类约束.

为了计算与第二类约束相应的 Dirac 括号,先计算 θ_i 和 θ_j 之间的 Poisson 括号. 场论中含 Fermi 子情形相空间变量的函数 F 和 G 的 Poisson 括号

$$\{F(x),G(y)\} = \int d^3z\left[\frac{\partial_r F(x)}{\partial\psi(\boldsymbol{z})}\frac{\partial_l G(y)}{\partial\pi_\psi(\boldsymbol{z})} - (-1)^{n_F n_G}\frac{\partial_r G(y)}{\partial\psi(\boldsymbol{z})}\frac{\partial_l F(x)}{\partial\pi_\psi(\boldsymbol{z})}\right] \quad (4\text{-}4\text{-}10)$$

由(4-4-6)、(4-4-7)式,约束 θ_i 和 θ_j 间的 Poisson 括号$\{\theta_i,\theta_j\}$构成的矩阵

$$\boldsymbol{C} = -i\begin{bmatrix} 0 & \gamma_0^T \\ \gamma_0 & 0 \end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (4\text{-}4\text{-}11)$$

其逆矩阵

$$\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = i\begin{bmatrix} 0 & \gamma_0 \\ \gamma_0^T & 0 \end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (4\text{-}4\text{-}12)$$

场论中的 Dirac 括号

$$\{F(x),G(y)\}_D = \{F(x),G(y)\} - \int dz dw \{F(x),\theta_i(z)\} \cdot c_{ij}^{-1}(z,w)\{\theta_j(w),G(y)\} \quad (4\text{-}4\text{-}13)$$

式中 $c_{ij}^{-1}\{\theta_j,\theta_k\} = \delta_{ik}$. 由此可求出

$$\{\psi(x),\bar{\psi}(y)\}_{\mathrm{D}} = -\mathrm{i}\gamma^0\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-4-14}$$

$$\{\psi(x),\pi_\psi(y)\}_{\mathrm{D}} = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-4-15}$$

Fermi 场 ψ 过渡到量子理论时,

$$\{\psi,\pi\}_{\mathrm{D}} \to -\mathrm{i}[\hat{\psi},\hat{\pi}]_+ \tag{4-4-16}$$

式中:$[\cdot,\cdot]_+$ 为场算符的反对易子;$\hat{\psi}$ 和 $\hat{\pi}$ 分别为 ψ 和π 相应的算符(下面常略去"^"符号).这样就给出了旋量场的量子化规则.

§4-5 旋量电动力学

自旋 1/2 的粒子(Fermi 子)包括中微子、轻子、重子和 quark,它们都是用 Dirac 旋量场来描述. 自然界中 Fermi 子的 4 种基本相互作用是由Bose 子来传递的,即胶子(Bose 子)传递 quark(Fermi 子)间的强相互作用(量子色动力学,QCD);光子(Bose 子)传递轻子、quark 之间的电磁相互作用(量子电动力学,QED);W 粒子、Z 粒子(Bose 子)传递轻子、quark、中微子之间的弱相互作用(量子味动力学,QFD);引力子(Bose 子)传递所有物质间的引力作用.一种流行的观点认为,自然界的基本相互作用都可以用规范理论来描述. 传递相互作用的Bose 子正好是规范粒子.QED 是其中最成功的 Abel 规范理论,其理论结果与实验结果符合很好.QCD 和QFD 均是非 Abel 规范理论,它们也取得了相当的成功. 本节从约束的观点来分析自旋 1/2 的粒子与电磁场相互作用的电动力学(旋量电动力学).

自旋 1/2 的自由旋量场的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}_\psi = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{4-5-1}$$

式中:ψ 为复四分量 Dirac 旋量,且 $\bar{\psi}=\psi^+\gamma^0$,$\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 构成八维 Grassmann 代数;γ_μ 为四维 Dirac 矩阵;旋量场和电磁场的相互作用,可通过 $\partial_\mu\to\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu$ 的代换得到. 再考虑到自由电磁场的 Lagrange密度,旋量场与电磁场耦合的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\overline{\psi}[\mathrm{i}\gamma_\mu(\partial^\mu-\mathrm{ie}A^\mu)-m]\psi=$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{em}}+\mathscr{L}_\psi+\mathscr{L}_{\mathrm{in}} \tag{4-5-2}$$

其中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{em}}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\quad(F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu) \tag{4-5-3}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{in}}=\mathrm{e}\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \tag{4-5-4}$$

显然,Lagrange 量(4-5-2) 式在

$$\left.\begin{aligned}&A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\varepsilon(x)\\&\psi(x)\to\exp(\mathrm{ie}\varepsilon(x))\psi(x)\\&\overline{\psi}(x)\to\overline{\psi}(x)\exp(-\mathrm{ie}\varepsilon(x))\end{aligned}\right\} \tag{4-5-5}$$

定域变 换下具有不变性.变换(4-5-5) 式构成 $U(1)$ Abel 规范群.旋量电动力学具有 $U(1)$ 定域规范不变性.

系统的 Lagrange 量(4-5-2)式是奇异的,在相空间描述中,系统存在固有约束.与场 A_μ 和 ψ 相应的正则共轭动量分别为

$$\pi^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu}=-F^{0\mu} \tag{4-5-6}$$

$$\pi_\psi=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^0 \tag{4-5-7}$$

$$\pi_{\overline{\psi}}=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\overline{\psi}}}=0 \tag{4-5-8}$$

初级约束分别为

$$\phi_1^0=\pi^0\approx 0 \tag{4-5-9a}$$

$$\phi_2^0=\pi_\psi-\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^0\approx 0 \tag{4-5-9b}$$

$$\phi_3^0=\pi_{\overline{\psi}}\approx 0 \tag{4-5-9c}$$

正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}=\pi^\mu\dot{A}_\mu+\dot{\psi}\pi_\psi+\dot{\overline{\psi}}\pi_{\overline{\psi}}-\mathscr{L}=$$

$$\frac{1}{2}\pi_i^2+A^0(\partial_i\pi_i+\mathrm{e}\overline{\psi}\gamma^0\psi)+$$

$$\frac{1}{4}F_{ik}^2 - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^k(\partial_k - \mathrm{ie}A_k)\psi + m\bar{\psi}\psi \qquad (4\text{-}5\text{-}10)$$

总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}} = \int \mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}} + \lambda^1\phi_1^0 + \lambda^2\phi_2^0 + \lambda^3\phi_3^0) \qquad (4\text{-}5\text{-}11)$$

量子理论中，旋量场 ψ 是反对易的. 对应于经典理论，Fermi 场 ψ 应为 Grassmann-数；而 Bose 场则对应于 C-数；同时含 Bose 场和 Fermi 场的系统，Poisson 括号则修改为 Bose-Fermi 括号(BFB)[24]. 算出不为 0 的基本(等时)BFB 为

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}5\text{-}12\text{a})$$

$$\{\psi(x), \pi_\psi(y)\} = -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}5\text{-}12\text{b})$$

$$\{\bar{\psi}(x), \pi_{\bar{\psi}}(y)\} = -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}5\text{-}12\text{c})$$

由初级约束的自洽性条件，可给出

$$\{\phi_1^0, H_{\mathrm{T}}\} = \partial_i\pi^i + \mathrm{e}\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0 \qquad (4\text{-}5\text{-}13)$$

$$\{\phi_2^0, H_{\mathrm{T}}\} = -\mathrm{i}\partial_k(\bar{\psi}\gamma^k) - m\bar{\psi} + \mathrm{e}(\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu) + \mathrm{i}(\lambda^3\gamma^0) \approx 0 \qquad (4\text{-}5\text{-}14)$$

$$\{\phi_3^0, H_{\mathrm{T}}\} = -\mathrm{i}\partial_k(\gamma^k\psi) + m\psi - \mathrm{e}(\gamma^\mu A_\mu\psi) + \mathrm{i}(\lambda^2\gamma^0) \approx 0 \qquad (4\text{-}5\text{-}15)$$

由(4-5-13)式给出次级约束

$$\phi^1 = \partial_i\pi^i + \mathrm{e}\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0 \qquad (4\text{-}5\text{-}16)$$

而(4-5-14)、(4-5-15)式确定了 Lagrange 乘子 λ^2 和 λ^3，并且再无其他约束. 可见，(4-5-16)式恰为 Gauss 定律. 电荷密度

$$j^0 = \mathrm{e}\,\bar{\psi}\gamma^0\psi$$

约束($\phi_1^0, \phi_2^0, \phi_3^0, \phi^1$)之间不为 0 的 Poisson 括号为

$$\{\phi_2^0(x), \phi_3^0(y)\} = -\mathrm{i}\gamma^0\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}5\text{-}17\text{a})$$

$$\{\phi_2^0(x), \phi^1(y)\} = \mathrm{e}\bar{\psi}\gamma^0\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}5\text{-}17\text{b})$$

$$\{\phi_3^0(x), \phi^1(y)\} = -\mathrm{e}\gamma^0\psi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}5\text{-}17\text{c})$$

因此，$\Lambda_1=\phi_1^0$ 为第一类约束，而 ϕ_2^0、ϕ_3^0 和 ϕ^1 为第二类约束，但它们不构成第二类约束的最小数目的集合. 约束 ϕ^1 在耦合常数为 0 时，化为自由电磁场的约束，即 $\partial_i\pi_i\approx0$. 在自由电磁场中ϕ^1 是第一类约束. 如果 ϕ^1 属于第二类约束的最小集合，零耦合极限将是不可能的，因而必存在约束的线 C 性组合，使其变为第一类约束，这个线性组合是

$$\Lambda_2=\phi^1+\mathrm{ie}(\phi_2^0\psi+\bar{\psi}\phi_3^0)=$$
$$\partial_k\pi_k-\mathrm{ie}(\bar{\psi}\pi_{\bar{\psi}}+\pi_\psi\psi) \quad (4\text{-}5\text{-}18)$$

由于

$$\{\phi_2^0(x),\Lambda_2(y)\}=\mathrm{ie}\phi_2^0\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\approx0 \quad (4\text{-}5\text{-}19\mathrm{a})$$

$$\{\phi_3^0(x),\Lambda_2(y)\}=-\,\mathrm{ie}\phi_3^0\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\approx0 \quad (4\text{-}5\text{-}19\mathrm{b})$$

这样，$\Lambda_1=\phi_1^0$ 和 Λ_2 为第一类约束，ϕ_2^0 和 ϕ_3^0 为第二类约束，同时给出了第一类约束的最大数目.

为了建立系统的量子理论，给出场的量子化条件，应选取规范条件. 因系统含两个第一类约束，所以需选取两个规范条件. 由于电磁场与物质场相互作用，此时用辐射规范(4-3-11)、(4-3-12)式已不再合适了. 因此，不能同时有 $A_0=0$ 和 $\partial_iA_i=0$，否则会与系统的运动方程不相容. 设选取其中一个 Coulomb 规范

$$\Omega_2=\partial_iA_i\approx0 \quad (4\text{-}5\text{-}20)$$

因为 $\dot{\Omega}_2=\partial_i\dot{A}_i=\partial_iF_{0i}+\partial_i\partial_iA_0$，由自洽性条件有 $\dot{\Omega}_2\approx0$. 按(4-5-6)式，另一个规范条件可取

$$\Omega_1=\partial_i\pi_i+\nabla^2A_0\approx0 \quad (4\text{-}5\text{-}21\mathrm{a})$$

或

$$\Omega'_1=A^0-\Delta^{-1}\partial_i\pi_i\approx0 \quad (\Delta=\nabla^2) \quad (4\text{-}5\text{-}21\mathrm{b})$$

这些规范条件与第一类约束满足

$$\det|\{\Omega_i,\Lambda_j\}|\neq0 \quad (i,j=1,2) \quad (4\text{-}5\text{-}22)$$

又由(4-5-16)式和 $\Omega_1\approx0$ 给出

$$\nabla^2A_0=j_0 \quad (4\text{-}5\text{-}23)$$

其中 A_0 为电磁场的标势.(4-5-23)式正好是电动力学中的 Poisson 方程,其解为

$$A_0(x) \approx \int d^3y \frac{j_0(x)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{4-5-24}$$

可见,在旋量电动力学中一般 $A_0 \approx 0$ 不成立.所以,(4-5-24)式就代替了自由电磁场中的规范条件 $A_0=0$.

将所有约束条件和规范条件一起记为 $\Phi_i=(\Omega'_1,\Lambda_1,\Omega_2,\Lambda_2,\phi_2^0,\phi_3^0)$,这时所有这些约束 Φ_i 一起变为第二类约束.约束 Φ_i 的 Poisson 括号 $\{\Phi_i,\Phi_j\}$ 构成矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 & -\mathrm{ie}\phi_2^0(x) & \mathrm{ie}\phi_3^0(x) \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{ie}\phi_2^0(x) & 0 & -\mathrm{i}\gamma^0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{ie}\phi_3^0(x) & \mathrm{i}\gamma^0 & 0 \end{bmatrix} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-5-25}$$

其逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Delta^{-1} & \mathrm{e}\phi_3^0(y)\gamma^0\Delta^{-1} & -\mathrm{e}\phi_2^0(y)\gamma^0\Delta^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta^{-1} & \mathrm{e}\phi_3^0(y)\gamma^0\Delta^{-1} & -\mathrm{e}\phi_2^0(y)\gamma^0\Delta^{-1} \\ 0 & -\Delta^{-1} & -\Delta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}\phi_3^0(x)\gamma^0\Delta^{-1} & \mathrm{e}\phi_3^0(x)\gamma^0\Delta^{-1} & 0 & 0 & \mathrm{i}\gamma^0 \\ 0 & -\mathrm{e}\phi_2^0(x)\gamma^0\Delta^{-1} & -\mathrm{e}\phi_2^0(x)\gamma^0\Delta^{-1} & 0 & \mathrm{i}\gamma^0 & 0 \end{bmatrix} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-5-26}$$

下面给出算符形式 Dirac 量子化.根据 Dirac 括号的定义式(4-4-13)、(4-5-26)式可求出场量 A_i、π^i、ψ、$\bar{\psi}$ 之间的 Dirac 括号,其他场量间的 Dirac 括号可由约束作为强方程而得到,即

$$A_0(x) = \mathrm{e}\int d^3y \frac{\bar{\psi}\gamma_0\psi}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{4-5-27}$$

$$\pi^0(x) = 0 \tag{4-5-28}$$

$$\pi_\psi(x) = -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \tag{4-5-29}$$

$$\pi_{\bar{\psi}}(x) = 0 \tag{4-5-30}$$

场量 A_k、π^k、ψ、$\bar{\psi}$ 之间的不为 0 的 Dirac 括号分别为

$$\{A_k(x), \pi^j(y)\}_D = \delta_k^j \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \partial_k \partial^j \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \tag{4-5-31}$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}_D = -\mathrm{i}\gamma^0 \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{4-5-32}$$

值得注意的是，(4-5-31)式与自由电磁场在辐射规范下的 Dirac 括号相同；而(4-5-32)式与自由 Dirac 旋量场的结果相同. 由 Fermi 场 ψ 过渡到量子理论时，

$$\{\psi, \bar{\psi}\}_D \to -\mathrm{i}[\psi, \bar{\psi}]_+ \tag{4-5-33}$$

式中$[\cdot,\cdot]_+$为反对易子. 这样就给出了旋量电动力学在 Coulomb 规范中的量子化.

类似地，可以讨论电磁场与复标量场耦合时的正则量子化(标量电动力学).

不同规范下量子理论的等价性可参见文献[19].

§ 4-6 Chern-Simons 物质场

在(1+2)维时空中任意子(anyons)呈现出的分数自旋和分数统计性质[32]，与凝聚态物质的某些现象相关(特别是分数量子 Hall 效应[33,34]和高温超导[35])，受到人们的广泛关注. 从量子力学和量子场论方面均开展了理论研究，但量子场论方面的研究远远不及量子力学开展得充分[36,37]. 在场论水平上研究任意子，Abel Chern-Simons 理论与物质场最小耦合是最基本的系统.

复标量场耦合Chern-Simon 项在(1+2)维时空中的Lagrange

量密度

$$\mathscr{L} = (\mathrm{D}_\mu\varphi)^*(\mathrm{D}^\mu\varphi) + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda \tag{4-6-1}$$

式中：$\mathrm{D}_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu$；$\varepsilon_{012}=1$. (4-6-1)式对应的作用量在下列变换下不变(Lagrange 量改变一散度项)：

$$\varphi(x)\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(x)}\varphi(x), A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\varepsilon(x) \tag{4-6-2}$$

Lagrange 量(4-6-1)式是奇异的. 在给出此奇异 Lagrange 系统的 Dirac 量子化时，先写出该系统的正则形式表述.

场量 A_μ、φ 和 φ^* 的共轭动量分别为

$$\pi_0=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^0}=0, \pi_i=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^i}=\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j \tag{4-6-3}$$

$$\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=(\mathrm{D}_0\varphi)^* \tag{4-6-4}$$

$$\pi^*=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\mathrm{D}_0\varphi \tag{4-6-5}$$

式中 $\varepsilon^{ij}=\varepsilon^{0ij}$. 系统的正则 Hamilton 量

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c &= \pi^\mu\dot{A}_\mu+\pi\dot{\varphi}+\pi^*\dot{\varphi}^*-\mathscr{L}= \\ &\pi\pi^*-(\mathrm{D}_i\varphi)^*(\mathrm{D}^i\varphi)-A_0\left(\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j-J_0\right)\end{aligned} \tag{4-6-6}$$

式中

$$J_0=\mathrm{i}(\pi\varphi-\varphi^*\pi^*) \tag{4-6-7}$$

此系统含两个第一类约束(见§3-4)，即

$$\Lambda_1=\pi_0\approx 0 \tag{4-6-8}$$

$$\Lambda_2=\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j-J_0\approx 0 \tag{4-6-9}$$

含两个第二类约束，即

$$\theta_1=\pi_1-\frac{\kappa}{4\pi}A_2\approx 0 \tag{4-6-10}$$

$$\theta_2=\pi_2+\frac{\kappa}{4\pi}A_1\approx 0 \tag{4-6-11}$$

按照约束 Hamilton 系统的量子化规则，对含第一类约束的系统，需选取规范条件. 考虑采用 Coulomb 规范有

$$\Omega_1 = \partial_i A^i \approx 0 \tag{4-6-12}$$

由于存在两个第一类约束，还需再取另一个规范条件. 其规范条件至少应满足一些基本要求，例如规范条件必须能固定规范、必须为系统动力学演化所保持、必须是可达到的等. 下面从 Coulomb 规范随时间演化的稳定性 $\dot{\Omega}_1 \approx 0$ 和系统的运动方程来确定另一规范条件. 由(4-6-1)式写出 A_μ 的 Euler-Lagrange 方程得

$$\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda = J^\mu \tag{4-6-13}$$

式中

$$J^\mu = -\mathrm{i}\varphi^* \mathrm{D}^\mu\varphi + \mathrm{i}(\mathrm{D}^\mu\varphi^*)\varphi \tag{4-6-14}$$

由于 $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\varepsilon_{\mu'\nu\lambda} = 2!\delta_{\mu\mu'}$，所以(4-6-13) 式又可写为

$$\partial_\nu A_\lambda = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}J^\mu \tag{4-6-15}$$

从而

$$\partial_\nu(\partial^\lambda A_\lambda) = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\lambda J^\mu \tag{4-6-16}$$

让 $\nu=0$，得

$$\partial_0(\partial^0 A_0 - \partial^i A_i) = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{\mu0\lambda}\partial^\lambda J^\mu \tag{4-6-17}$$

由 Coulomb 规范的稳定性要求 $\partial^i \dot{A}_i \approx 0$，从(4-6-17)式得

$$\partial_0\partial^0 A_0 \approx \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{i0j}\partial^j J^i \tag{4-6-18}$$

由(4-6-15) 式，又有

$$\partial^\nu(\partial_\nu A_\lambda) = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu J^\mu \tag{4-6-19}$$

让 $\lambda=0$，得

$$\partial^0\partial_0 A_0 - \partial^i\partial_i A_0 = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij0}\partial^j J^i \tag{4-6-20}$$

由(4-6-18)、(4-6-20) 式得

$$\partial_i\partial^i A_0 \approx \frac{2\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij}\partial^j J^i \tag{4-6-21}$$

记$\nabla^2=\partial_i\partial^i$，这样，另一个规范条件可取为

$$\Omega_2=-\nabla^2A_0+\frac{2\pi}{\kappa}\epsilon_{ij}\partial^iJ^j\approx 0 \qquad (4\text{-}6\text{-}22)$$

所有约束Λ_1、Λ_2、$\theta_i(i=1,2)$和规范约束Ω_1、Ω_2一起构成第二类约束. 这样可通过Dirac括号和量子括号的对应关系实现对系统的量子化，其对应关系为$\{\cdot,\cdot\}_D\to -i[\cdot,\cdot]$. 计算出场量、正则共轭动量的Dirac括号后，可得出非零的等时对易关系，即

$$[\varphi(x),\pi(y)]=i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}6\text{-}23)$$

$$[\varphi^*(x),\pi^*(y)]=i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}6\text{-}24)$$

$$[\varphi(x),A_i(y)]=-\frac{2\pi}{\kappa}\varphi(x)\epsilon_{ij}\partial_x^jG(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}6\text{-}25)$$

$$[\varphi^*(x),A_i(y)]=\frac{2\pi}{\kappa}\varphi^*(x)\epsilon_{ij}\partial_x^jG(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}6\text{-}26)$$

$$[\pi(x),A_i(y)]=\frac{2\pi}{\kappa}\pi(x)\epsilon_{ij}\partial_x^jG(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}6\text{-}27)$$

$$[\pi^*(x),A_i(y)]=-\frac{2\pi}{\kappa}\pi^*(x)\epsilon_{ij}\partial_x^jG(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}6\text{-}28)$$

式中$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$为二维空间的Green函数，它适合

$$\nabla^2G(\boldsymbol{x})=-\delta(\boldsymbol{x}) \qquad (4\text{-}6\text{-}29)$$

类似地，对Chern-Simons项与Fermi场耦合的情形也开展了研究[38].

§4-7 规范不变自对偶场

自对偶场的量子化与弦理论有关[39]，自对偶理论引起了人们的关注[40]. (1+1)维自对偶场(自由场)的Lagrange量[41]

$$\mathscr{L}_0=\dot{\phi}\phi'-(\phi')^2 \qquad (4\text{-}7\text{-}1)$$

式中点与撇分别代表对时间和空间的微商. (1+1)维自由电磁场的Lagrange量

$$\mathscr{L}_{em} = \frac{1}{2}(\dot{A}_1 - A'_0)^2 \qquad (4\text{-}7\text{-}2)$$

(4-7-2)式不描述任何实际光子，因为在空间中无横向. 考虑一个含 $\mathscr{L}_0$ 和 $\mathscr{L}_{em}$且有相互作用的模型，其 Lagrange 量[42]

$$\mathscr{L}' = \dot{\phi}\phi' - (\phi')^2 + \frac{1}{2}(\dot{A}_1 - A'_0)^2 + c\phi'(A_0 - A_1) - \frac{1}{2}c^2A_1^2 \qquad (4\text{-}7\text{-}3)$$

式中 c 是一个具有质量量纲的实参数. (4-7-3)式不是规范不变的. 一个规范不变的 Lagrange 量[43]

$$\mathscr{L} = \dot{\phi}\phi' - (\phi')^2 + \frac{1}{2}(\dot{A}_1 - A'_0)^2 + c\phi'(A_0 - A_1) - \frac{1}{2}c^2A_1^2 - \dot{\theta}\theta' - (\theta')^2 + c\theta'(A_0 + A_1) \qquad (4\text{-}7\text{-}4)$$

式中 $\theta(x)$ 为另一个动力学变量. 显然，由这个 Lagrange 量决定的作用量在

$$\delta\phi = \varepsilon(x),\ \delta\theta = -\varepsilon(x),\ \delta A_\mu = -\frac{2}{c}\partial_\mu\varepsilon(x) \qquad (4\text{-}7\text{-}5)$$

的规范变换下保持不变. 因此，Lagrange 量(4-7-4) 式是奇异的.

根据(4-7-4) 式，求得与场 A_0、A_1、ϕ 和 θ 相应的正则共轭动量分别为

$$\pi^0 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_0} = 0 \qquad (4\text{-}7\text{-}6)$$

$$\pi^1 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_1} = \dot{A}_1 - A'_0 \qquad (4\text{-}7\text{-}7)$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = \phi' \qquad (4\text{-}7\text{-}8)$$

$$\pi_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}} = -\theta' \qquad (4\text{-}7\text{-}9)$$

从而得到系统的初级约束分别为

$$\phi_1^0 = \pi^0 \approx 0 \tag{4-7-10}$$

$$\phi_2^0 = \pi_\phi - \phi' \approx 0 \tag{4-7-11}$$

$$\phi_3^0 = \pi_\theta + \theta' \approx 0 \tag{4-7-12}$$

系统的正则 Hamilton 量

$$H_c = \int d^3x \mathscr{H}_c = \int d^3x [\pi_\phi \dot{\phi} + \pi_\theta \dot{\theta} + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L}] =$$

$$\int d^3x \Big[\frac{1}{2}(\pi^1)^2 + \pi^1 A'_0 + (\phi')^2 - c\phi'(A_0 - A_1) +$$

$$\frac{1}{2}c^2 A_1^2 + (\theta')^2 - c\theta'(A_0 + A_1) \Big] \tag{4-7-13}$$

总 Hamilton 量

$$H_T = \int d^3x [\mathscr{H}_c(x) + \lambda^a(x)\phi_a^0(x)] \tag{4-7-14}$$

式中 $\lambda^a(x)(a = 1,2,3)$ 为 Lagrange 乘子场. 初级约束随时间演化的自洽性条件为

$$\dot{\phi}_a(x) = \{\phi_a^0, H_T\} =$$

$$\int d^3y \{\phi_a^0(x), \mathscr{H}_c(y) + \lambda^b(y)\phi_b^0(y)\} \approx 0 \tag{4-7-15}$$

由 $\dot{\phi}_1^0 \approx 0$ 求得的次级约束

$$\phi^1 = \partial_1 \pi^1 + c(\phi' + \theta') \approx 0 \tag{4-7-16}$$

由 $\dot{\phi}_2^0 \approx 0$ 和 $\dot{\phi}_3^0 \approx 0$ 给出的是确定 Lagrange 乘子 $\lambda^2(x)$ 和 $\lambda^3(x)$ 的方程,既不给出次级约束,且次级约束(4-7-16) 式的自洽性要求 $\dot{\phi}^1 \approx 0$,也不导致新的次级约束. 对约束(4-7-11)、(4-7-12)式和(4-7-16)式做线性组合,得

$$\Lambda_2 = \partial_1 \pi^1 + \frac{c}{2}(\pi_\phi + \phi' - \pi_\theta + \theta') \approx 0 \tag{4-7-17}$$

这样 $\Lambda_1 = \phi_1^0$ 和 Λ_2 为第一类约束,$\theta_1 = \phi_2^0$ 和 $\theta_2 = \phi_3^0$ 为第二类约束.

相应于两个第一类约束,需选取两个规范条件,即

$$\Omega_1 = -A_0 - A_1 \approx 0 \tag{4-7-18}$$

$$\Omega_2 = \theta' \approx 0 \tag{4-7-19}$$

可见，所有约束条件和规范条件(约束)一起(记为 Φ_i)都变为第二类约束. 由这些第二类约束 $\Phi_i \approx 0$ 的 Poisson 括号构成矩阵

$$[\{\Phi_i(x),\Phi_j(y)\}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\partial_x & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & -\frac{c}{2}\partial_x \\ -1 & 0 & 0 & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x & -\frac{c}{2}\partial_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta(x-y) \tag{4-7-20}$$

利用

$$\int \mathrm{d}z c_{ij}^{-1}(x,z)\{\Phi_j(z),\Phi_k(y)\} = \delta_{ik}\delta(x-y) \tag{4-7-21}$$

(4-7-20) 式的逆阵 C^{-1} 为

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{c^2}\partial_x\delta(x-y) & 0 & \frac{1}{c}\delta(x-y) & \frac{2}{c^2}\delta(x-y) & -\delta(x-y) & -\frac{2}{c}\delta(x-y) \\ 0 & -\frac{1}{4}\varepsilon(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c}\delta(x-y) & 0 & \frac{1}{4}\varepsilon(x-y) & \frac{1}{2c}\varepsilon(x-y) & 0 & 0 \\ -\frac{2}{c^2}\delta(x-y) & 0 & \frac{1}{2c}\varepsilon(x-y) & \frac{1}{c^2}\varepsilon(x-y) & 0 & -\frac{1}{c}\varepsilon(x-y) \\ \delta(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{c}\delta(x-y) & 0 & 0 & -\frac{1}{c}\varepsilon(x-y) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4-7-22}$$

式中 ε 为阶跃函数，即为 $\varepsilon(x)$ 且

$$\varepsilon(x) = -\varepsilon(-x) \tag{4-7-23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x} = 2\delta(x) \tag{4-7-24}$$

根据 Dirac 括号的定义，有

$$\{F(x),G(y)\}_{\mathrm{D}} =$$
$$\{F(x),G(y)\} - \int \mathrm{d}z\mathrm{d}w \{F(x),\Phi_i(z)\} \cdot$$
$$c_{ij}^{-1}(z,w)\{\Phi_j(w),G(y)\} \qquad (4\text{-}7\text{-}25)$$

求得该系统所有非零的 Dirac 括号为

$$\left.\begin{aligned}
&\{A_1(x),\pi^1(y)\}_{\mathrm{D}} = \delta(x-y)\\
&\{A_1(x),A_1(y)\}_{\mathrm{D}} = -\frac{2}{c^2}\partial_x\delta(x-y)\\
&\{A_0(x),A_1(y)\}_{\mathrm{D}} = -\{A_0(x),A_0(y)\}_{\mathrm{D}} =\\
&\qquad \frac{2}{c^2}\partial_x\delta(x-y)\\
&\{A_0(x),\pi^1(y)\}_{\mathrm{D}} = -\delta(x-y)\\
&\{A_1(x),\phi(y)\}_{\mathrm{D}} = -\{A_0(x),\phi(y)\}_{\mathrm{D}} =\\
&\qquad -\frac{1}{c}\delta(x-y)\\
&\{A_1(x),\pi_\phi(y)\}_{\mathrm{D}} = -\{A_0(x),\pi_\phi(y)\}_{\mathrm{D}} =\\
&\qquad \frac{1}{c}\partial_x\delta(x-y)
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}7\text{-}26)$$

其余场量间的 Dirac 括号均为 0. 通过代换 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}} \to -\mathrm{i}[\cdot,\cdot]$ 可得到场的量子括号，即得到诸场量间相应的对易关系式.

§ 4-8 杨-Mills 场

非 Abel 规范场(杨-Mills 场)的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \qquad (4\text{-}8\text{-}1)$$

式中

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu \qquad (4\text{-}8\text{-}2)$$

为场强张量；A^a_μ 为规范势(杨-Mills 势)；f^a_{bc} 为非 Abel 规范群的结构常数. 相应于 A^a_μ 的正则动量

$$\pi_a^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu^a} = -F_a^{0\mu} \tag{4-8-3}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c = \int_V \mathrm{d}^3x\left(\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a - A_0^a\partial_i\pi_i^a + \frac{1}{4}F_{ij}^aF_{ij}^a + g f_{bc}^a A_0^b A_i^c \pi_i^a\right) \tag{4-8-4}$$

初级约束

$$\phi_a^0 = \pi_a^0 \approx 0 \tag{4-8-5}$$

次级约束

$$\phi_a^1 = \partial_i\pi_a^i - g f_{bc}^a A_i^b \pi_c^i = \mathrm{D}_i\pi_a^i \approx 0 \tag{4-8-6}$$

式中 D_i 代表协变微商. 约束 $\phi_a^0\approx 0$ 和 $\phi_a^1\approx 0$ 均是第一类的.

对第一类约束需选取适当的规范条件. 考虑取 Coulomb 规范

$$\Omega_2^a = \partial^i A_i^a \approx 0 \tag{4-8-7}$$

由(4-8-2) 式有

$$\partial_0\Omega_2^a = \partial^i F_{0i}^a + \partial^i\partial_i A_0^a + g f_{bc}^a \partial^i A_0^b A_i^c \tag{4-8-8}$$

由 $\Omega_2^a\approx 0$ 的稳定性可取另一个规范条件,即

$$\Omega_1^a = \partial^i\pi_i^a + \partial^i\partial_i A_0^a - g f_{bc}^a A_i^b \partial^i A_0^c \approx 0 \tag{4-8-9}$$

规范条件 $\Omega_1^a\approx 0$、$\Omega_2^a\approx 0$ 和约束条件 $\phi_a^0\approx 0$、$\phi_a^1\approx 0$ 一起,使所有约束(包括规范约束)成为第二类约束. (4-8-9)式和电磁场理论中出现的规范条件不同,这里出现了非线性项.

从(4-8-9)式可以解出A_0 作为其他变量的函数. 为此,引入算符

$$M_{ac} = \delta_{ac}\partial_k\partial^k - g f_{bc}^a A_k^b \partial^k \tag{4-8-10}$$

于是(4-8-9) 式可写为

$$M_{ab}A_0^b \approx -\partial_i\pi_a^i \tag{4-8-11}$$

将算符 M_{ak}的 Green 函数记为 G^{ab},有

$$M_{ab}(\boldsymbol{x})G^{bc}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}) = \delta_a^c\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-8-12}$$

这样，从(4-8-11)式可解出

$$A_0^a \approx -\int d^3y G^{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{A})\partial_i \pi_b^i \tag{4-8-13}$$

规范条件 Ω_1^a 和 Ω_2^a 与场方程是相容的.

按约束系统的 Dirac 量子化方法，进一步需计算约束和规范条件($\phi_a^0,\phi_a^1,\Omega_1^a,\Omega_2^a$)之间的 Poisson 括号；然后再求出 Dirac 括号，例如 Ω_2^a 和 ϕ_b^1 之间的 Poisson 括号为

$$\{\partial_i A_i^a, \phi_b^1(y)\} = -M_b^a \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-8-14}$$

式中 M_b^a 为(4-8-10)式含有场量的算符；最后求出的基本 Dirac 括号十分复杂，用这些括号成功地实现正则量子化是十分困难的(§4-6 中也有类似情况). 对非 Abel 规范场，用正则算符形式量子化，处理上十分不方便. 下章讨论路径积分量子化方法，对非 Abel 规范场的量子化是十分有效的；而用 Dirac 括号对非 Abel 规范场实现其量子化不是最佳方案.

参 考 文 献

[1] Dirac P A M. Lectures on Quantum Mechanics, New York: Yeshiva University, 1964

[2] Faddeev L D. Theor Math Phys, 1970, 1: 1

[3] Senjanovic P. Ann Phys (N Y), 1976, 100: 227

[4] Fradkin E S, Vilkovisky G A. Phys Lett, 1975, B55: 224

[5] Fradkin E S, Vasiliev M A. Phys Lett, 1977, B72: 70

[6] Fradkin E S, Fradkina T E. Phys Lett, 1978, B72: 343

[7] Batalin I A, Vilkovisky G A. Phys Lett, 1977, B69: 309

[8] Batalin I A, Fradkin E S. Phys Lett, 1983, B128: 303

[9] Henneaux M. Phys Rep, 1985, 126: 1

[10] Henneaux M, Teitelboim C. Quantization of Gauge System. Princeton:

Princeton University Press, 1992
[11] Faddeev L D, Popov V N. Phys Lett, 1967, B25: 30
[12] Slavnov A A, Faddeev L D. Introduction to Quantum Theory of Gauge Fields. Moscow: Nauka, 1978
[13] De Witt B S. Phys Rev, 1967, 162: 1195
[14] Batalin I A, Vilkovisky G A. Phys Lett, 1981, B102: 27
[15] Batalin I A, Vilkovisky G A. Phys Rev, 1983, D28: 2567
[16] Gomis J, Paris J, Samuel S. Phys Rep, 1995, 259: 1
[17] 李子平. 物理学报, 1996, 45: 1255
[18] Gitman D M, Tyutin I V. Quantization of Fields with Constraints. Berlin: Springer-Verlag, 1990
[19] Feynman R P, Hibbs A R. Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw-Hill, 1965
[20] Parisi C, Wu Y S. Sci Sincia, 1981, 24: 483
[21] Nakanishi N. Prog Theor Phys Suppl, 1972, 51: 1
[22] Faddeev L D, Jackiw R. Phys Rev Lett, 1988, 60: 1692
[23] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993
[24] Sundermeyer K. Constrained Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1982
[25] Kummer W. Acta Phys Austr, 1961, 14: 149
[26] Arnowitt R, Fickler S I. Phys Rev, 1962, 127: 1821
[27] Willemsen J F. Phys Rev, 1978, D17: 574
[28] Chang S S. Phys Rev, 1978, D12: 2611
[29] Creutz M. Ann Phys (N Y), 1979, 117: 471
[30] Schweber S S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York: Harper and Row, 1964
[31] 李子平, 廖理儿. 群论及其在物理学中的应用. 乌鲁木齐: 新疆人民出版社, 1988
[32] Wilczek F. Phys Rev Lett, 1982, 49: 957
[33] Halperin B I. Phys Rev Lett, 1984, 52: 1583
[34] Arovas D, Schrieffer J R, Wilczek F. Phys Rev Lett, 1984, 53: 722

[35] Laughlin R B. Science, 1988, 242: 525
[36] Forte S. Rev Mod Phys, 1992, 64: 193
[37] Boyanovsky D. Int J Mod Phys, 1992, A7: 5917
[38] Banerjee R. Phys Rev, 1993, D48: 2905
[39] Labastid J M F, Pernici M. Phys Rev Lett, 1987, 59: 2511
[40] Mezincescu L, Nepomechie R I. Phys Rev, 1988, D37: 3067
[41] Floreamini R, Jackiw R. Phys Rev Lett, 1987, 59: 1873
[42] Ghosh S, Mitra P. Phys Rev, 1991, D44: 1332
[43] 缪炎刚. 物理学报, 1991, 42: 536

第五章

路径积分量子化

系统的经典理论过渡到量子理论，除采用正则算符形式的量子化外，也可采用路径积分（泛函积分）量子化. 在量子力学中，这两种形式的量子化结果是等价的. 从正则算符形式量子化出发，可导出路径积分量子化结果；反之，从路径积分量子化出发，也可导出正则算符形式量子化结果. 本章从介绍量子力学中的路径积分量子化开始，一直到讨论规范场的路径积分量子化，特别是着重阐明了约束 Hamilton 系统（奇异 Lagrange 量系统）的路径积分量子化，并对含第一类约束系统和含第二类约束系统分别作了讨论，说明了基于 BRST 对称的 BFV 量子化方案，讨论了路径积分量子化在杨-Mills 场和 Chern-Simons 理论中的应用.

§5-1 路径积分

量子力学和量子场论中的路径积分（或称泛函积分）形式的表述始于 Dirac 的最初思想[1]，其后 Feynman 的工作奠定了这个理论形式的基础[2,3]. Faddeev 和 Popov 把 Feynman 提出的路径积分方法用于规范理论，成功地实现了非 Abel 规范场（如杨-Mills 场）的量子化[4]. Faddeev-Popov 方法是非 Abel 规范场最简单的量子化方法，它是一种比较直观的、非严格的量子化方法. 路径积分形式量子化在量子力学，特别是在现代量子场论（非 Abel 规范场）中得到了广泛的应用[5,6].

关于约束 Hamilton 系统的路径积分量子化，Faddeev 首先给出了仅含第一类约束系统的路径积分量子化[7]，Senjanovic 给出

了同时含第一类约束和第二类约束系统的路径积分量子化[8]，通常将其称为 FS 量子化方案. Batalin、Fradkin 和 Vilkovsky 建立了一种所谓非闭合规范代数的量子化方法[9~13]，并将这种方法称为 BFV 量子化方案. 它是一种协变性量子理论，不约化相空间，而是通过增添 Grassmann 数扩展相空间. 扩展相空间中的 BFV 路径积分对应于一个无约束的 Hamilton 系统. 目前人们常用的 BFV 方案是建立在 BRST(Becchi-Rouet-Stora-Tyutin)对称变换基础上的 Hamilton 形式的 BRST 量子化方法(BRST 变换和 BRS 变换是性质上非常相近的变换). 基于 Lagrange 形式的 BRST 路径积分量子化，即所谓 BV(Batalin-Vilkovisky)量子化方法[14,15]，受到人们的关注.

约束 Hamilton 系统的算符形式的正则量子化和路径积分量子化，均是建立在经典 Dirac 约束理论基础上的，涉及 Dirac 猜想(所有第一类约束均是规范变换的生成元)是否有效. 一些重要的物理系统，按 Dirac 猜想尚未导致不合理的结果，这样相应每一个第一类约束，需选取一个规范条件. 实际上对于某些特殊的奇异 Lagrange 量系统，Dirac 猜想是不成立的[16~19]. 对此类系统的量子化问题需要重新考虑.

Faddeev 和 Jackiw 提出了一种与传统方法不同的约束系统的量子化方案[20]. 在这种方案中不需要区分初级和次级第一类与第二类约束. 在一些模型中将这种量子化方法与 Dirac 方法的结果进行了比较研究.

在约束 Hamilton 系统的量子化中，用路径积分形式有其突出的优点，出现在路径积分中的量均是 C-数. 这不仅为分析系统的量子对称性质带来了方便，也为 Faddeev-Popov 的直观理论提供了依据. 为了研究约束系统的路径积分量子化形式，首先简要地介绍一些量子力学和量子场论中路径积分的有关知识. 这里讨论正规系统(非奇异 Lagrange 量)的情形.

首先说明最简单的一维量子力学问题. 设$\hat{q}(t)$代表 Heisenberg 表象中 t 时刻的广义坐标算符; $\hat{p}(t)$ 代表其正则共轭动量算符; $|q,t\rangle$ 代表 Heisenberg 表象中算符$\hat{q}(t)$的本征态,其本征值为 q,即

$$\hat{q}(t)|q,t\rangle = q|q,t\rangle \tag{5-1-1}$$

在 Heisenberg 表象中,态矢是不随时间改变的,其记号 $|q,t\rangle$ 中的 t 只是表示 t 时刻算符$\hat{q}(t)$ 的本征态.

设 Hamilton 算符 $\hat{H}$ 不显含时间,作时间平移得到与时间有关的算符$\hat{q}(t)$ 和$\hat{p}(t)$ 以及不同时刻的 Heisenberg 态矢 $|q,t\rangle$ 和 $|p,t\rangle$.

$$\hat{q}(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)}\hat{q}(t_0)e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \tag{5-1-2a}$$

$$\hat{p}(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)}\hat{p}(t_0)e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \tag{5-1-2b}$$

态矢 $|q,t\rangle$和 $|q\rangle=|q,t_0\rangle$, $|p,t\rangle$和 $|p\rangle=|p,t_0\rangle$之间有以下幺正变换关系:

$$|q,t\rangle = e^{i\hat{H}(t-t_0)}|q\rangle \tag{5-1-3a}$$

$$|p,t\rangle = e^{i\hat{H}(t-t_0)}|p\rangle \tag{5-1-3b}$$

现在计算 t 时刻处于本征值为 q 的量子态 $|q,t\rangle$,到 t'时刻处于本征值为 q'的量子态 $|q',t'\rangle$的跃迁矩阵元

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|e^{-i\hat{H}(t'-t)}|q\rangle \tag{5-1-4}$$

并称它为转换矩阵元或传播函数,记为 $K(q',t';q,t)$. 它是 t 时刻位于 q 处的粒子到 t' 时刻位于 q' 处的概率幅. 将时间区间$[t,t']$分为 n 个小间隔,每个小间隔的长度 $\varepsilon = t_j - t_{j-1}$ $(j=1,2,\cdots,n)$,并记 $t_0 = t, t_n = t'$. 在区间$[t,t']$的一个分点 t_i,有

$$\int dq(t_i)|q_i,t_i\rangle\langle q_i,t_i| = 1 \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{5-1-5}$$

将其插入转换矩阵元中得

$$K(q',t';q,t) = \langle q',t'|q,t\rangle =$$

$$\int dq_1\cdots dq_{n-1}\langle q',t'|q_{n-1},t_{n-1}\rangle\cdot\langle q_{n-1},t_{n-1}|\cdots\cdot$$

$$|q_2,t_2\rangle\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle\langle q_1,t_1|q,t\rangle \tag{5-1-6}$$

在小区间(t_{j-1},t_j)上，有

$$\langle q_j,t_j|q_{j-1},t_{j-1}\rangle=\langle q_j|e^{-i\hat{H}(t_j-t_{j-1})}|q_{j-1}\rangle\simeq$$

$$\langle q_j|1-i\varepsilon\hat{H}|q_{j-1}\rangle \tag{5-1-7}$$

由于 Hamilton 算符$\hat{H}$是$\hat{q}$和$\hat{p}$的函数. 当$\hat{H}$是$\hat{q}$和$\hat{p}$的多项式时，利用对易关系将每一项中的算符$\hat{q}$排在算符$\hat{p}$的左边，利用关系式

$$|q_{j-1}\rangle=\int\frac{dp_j}{2\pi}|p_j\rangle\langle p_j|q_{j-1}\rangle=\int\frac{dp_j}{2\pi}e^{-ip_jq_{j-1}}|p_j\rangle \tag{5-1-8}$$

可得

$$\langle q_j|\hat{H}|q_{j-1}\rangle=\int\frac{dp_j}{2\pi}e^{-ip_jq_{j-1}}\langle q_j|\hat{H}(\hat{q},\hat{p})|p_j\rangle=$$

$$\int\frac{dp_j}{2\pi}e^{ip_j(q_j-q_{j-1})}H(q,p) \tag{5-1-9}$$

式中：算符$\hat{H}(\hat{q},\hat{p})$中的$\hat{q}$对左边作用、$\hat{p}$对右边作用后变成 C-数的正则 Hamilton量 $H(q,p)$. 这样，量子系统的转换矩阵元，就转化为对 C-数的积分，

$$\langle q_j,t_j|q_{j-1},t_{j-1}\rangle=\int\frac{dp_j}{2\pi}e^{ip_j(q_j-q_{j-1})}(1-i\varepsilon H)\simeq$$

$$\int\frac{dp_j}{2\pi}\exp\{i[p_j(q_j-q_{j-1})-\varepsilon H]\} \tag{5-1-10}$$

从而

$$\langle q',t'|q,t\rangle=\int\prod_j^{n-1}dq_j\prod_j^{n}\frac{dp_j}{2\pi}\cdot$$

$$\exp\left\{i\sum_j\varepsilon\left[p_j\frac{q_j-q_{j-1}}{\varepsilon}-H\right]\right\} \tag{5-1-11}$$

当$n\to\infty$时，记

$$\mathscr{D}q=\prod_j dq_j,\ \mathscr{D}p=\prod_j\frac{dp_j}{2\pi\hbar} \tag{5-1-12}$$

则(5-1-11)式变为

$$\langle q',t'|q,t\rangle=\int\mathscr{D}q(\tau)\,\mathscr{D}p(\tau)\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}[p(\tau)\dot{q}(\tau)-\right.$$

$$H(q(\tau),p(\tau))]\mathrm{d}\tau\Big\} = \int\mathscr{D}(q)\mathscr{D}(p)\exp\left(\frac{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}}{\hbar}\right) \quad (5\text{-}1\text{-}13)$$

其中

$$I^{\mathrm{p}} = \int_t^{t'}[p(\tau)\dot{q}(\tau) - H(q(\tau),p(\tau))]\mathrm{d}\tau \quad (5\text{-}1\text{-}14)$$

为正则作用量. 这里补写了自然单位制中省去的因子 $\hbar$. (5-1-13)式中积分是无穷维的，积分变量是函数 $q(\tau)$ 和 $p(\tau)$，所以称为路径(泛函)积分. 积分是对定义在函数空间上的测度施行，而不是对实数或复数域上的测度施行. 这个路径积分的确切意义是由(5-1-11)式右端的极限给出的. 它是所有在 t 时刻坐标为 q 至 t' 时刻坐标为 q' 的相空间中一切路径 $(q(\tau),p(\tau))$ 的贡献之和(在端点 t 和 t' 时刻，对动量没有限制)，所以称为路径积分.

讨论一种简单的情形.正则 Hamilton 量 H 具有如下形式：

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (5\text{-}1\text{-}15)$$

此时可以作出(5-1-11)式对 p_j 的积分，利用 Gauss 积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[p_j(q_j - q_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{2m}p_j^2\right]\right\} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\mathrm{i}\varepsilon}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon\frac{m}{2}\dot{q}_j^2\right) \quad (5\text{-}1\text{-}16)$$

于是当 $n\to\infty$ 时，(5-1-11) 式就化为

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}q_j}{[2\pi\hbar\mathrm{i}\varepsilon/m]^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{\varepsilon}\right)^2 - V(q_j)\right]\right\} \quad (5\text{-}1\text{-}17)$$

或简写为

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \left[\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int_q^{q'}\mathscr{D}q(\tau)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))\mathrm{d}\tau\right\} =$$

$$\left[\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int_{q}^{q'}\mathscr{D}q(\tau)\exp\left(\frac{1}{\hbar}I[q(\tau)]\right) \tag{5-1-18}$$

式中

$$\mathscr{D}q(\tau)=\prod_{j}\frac{\mathrm{d}q_j}{[2\pi\hbar i\varepsilon/m]^{\frac{1}{2}}} \tag{5-1-19}$$

$$L(q,\dot{q})=\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q) \tag{5-1-20}$$

式中：$L(q,\dot{q})$ 为经典 Lagrange 函数；$I[q(\tau)]$ 为联接 $q(t)=q$ 和 $q(t')=q'$ 两点的路径的经典作用量，它是 $q(\tau)$ 的泛函.(5-1-18)式是位形空间(坐标空间)中的路径积分. 对某些特殊形式的 Hamilton 量，相空间中的路径积分(5-1-13)式可化为位形空间中的路径积分(5-1-18)式.(5-1-18)式表明，量子力学中的概率幅 $\langle q',t'|q,t\rangle$ 是位形空间中所有联接 $q(t)=q$ 和 $q(t')=q'$ 两点的路径 $q(\tau)$ 的贡献的叠加；每个路径的贡献的振幅相同而位相不同，且每一路径 $q(\tau)$ 对位相的贡献为 $e^{\frac{i}{\hbar}I[q(\tau)]}$. $\langle q',t'|q,t\rangle$ 的模的平方代表概率. 不同路径 $q(\tau)$ 对 $\langle q',t'|q,t\rangle$ 的贡献是概率幅的相加，而不是概率相加. 由于不同路径贡献不同的相因子，因此不同路径之间会发生相互干涉.(5-1-18)式是 Feynman 原来采用的路径积分形式，他把(5-1-18)式作为量子力学的基本假设，由(5-1-18)式可导出Schrödinger 方程和通常量子力学中算符的对易关系(这个问题将在后面讨论). 这里是从量子力学的算符表述形式推出了 Feynman 的路径积分形式.

在 Hamilton 算符 $\hat{H}(t;q,p)$ 显含时间的情况下，计算转换矩阵元需要另加讨论. 时间 t、t_0 的算符 $\hat{\Omega}$ 和态矢，可通过幺正变换实现，即

$$\hat{\Omega}(t)=(U(t,t_0))^{+}\hat{\Omega}(t_0)U(t,t_0) \tag{5-1-21}$$

$$|q,t\rangle=(U(t,t_0))^{+}|q\rangle \tag{5-1-22}$$

式中$|q\rangle=|q,t_0\rangle$. 于是有

$$\langle q',t'|q,t\rangle=\langle q'|U(t',t_0)(U(t,t_0))^+|q\rangle \qquad (5\text{-}1\text{-}23)$$

算符$U(t,t_0)$适合方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,t_0)=-\mathrm{i}\hat{H}(t;\hat{q},\hat{p})U(t,t_0) \qquad (5\text{-}1\text{-}24)$$

式中$\hat{q}=\hat{q}(t_0)$,$\hat{p}=\hat{p}(t_0)$. 当算符$\hat{H}(t)$的范数$\|\hat{H}(t)\|$为 Lebesguse 可积时,算符方程(5-1-24)式的解存在且是唯一的[21]. 算符$\hat{H}(t)$显含时间的情形下,不同时刻的$\hat{H}(t)$一般是不能对易的,因此(5-1-24)式的解可写为[21]

$$U(t,t_0)=T\exp\left\{-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}(\tau;\hat{q},\hat{p})\mathrm{d}\tau\right\} \qquad (5\text{-}1\text{-}25)$$

式中T代表编时乘积,且

$$T(\hat{\Omega}(t_1)\hat{\Omega}(t_2))=\begin{cases}\hat{\Omega}(t_1)\hat{\Omega}(t_2), t_1>t_2\\ \hat{\Omega}(t_2)\hat{\Omega}(t_1), t_2>t_1\end{cases} \qquad (5\text{-}1\text{-}26)$$

将(5-1-25)式代入(5-1-23)式,得

$$\langle q',t'|q,t\rangle=\langle q'|U(t',t)|q\rangle \qquad (5\text{-}1\text{-}27)$$

其中

$$U(t',t)=T\exp\left\{-\mathrm{i}\int_{t}^{t'}\hat{H}(\tau;\hat{q},\hat{p})\mathrm{d}\tau\right\} \qquad (5\text{-}1\text{-}28)$$

可见,当$\hat{H}$显含时间的情形下,转换矩阵元的计算应由(5-1-27)、(5-1-28)式给出.

把时间区间$[t,t']$划分为n个相等间隔的小区间,并令

$$t_j-t_{j-1}=\varepsilon,\ t_0=t,\ t_n=t'$$

此时(5-1-28)式可写为

$$U(t',t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}[1-\mathrm{i}\varepsilon\hat{H}(t_j;\hat{q},\hat{p})] \qquad (5\text{-}1\text{-}29)$$

在(5-1-29)式中插入$(n-1)$个因子$\int\mathrm{d}q_j|q_j\rangle\langle q_j|=1$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$,并代入(5-1-27)式中,则得

$$\langle q',t'|q,t\rangle =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{d}q_k\prod_{j=1}^{n}\langle q_k|[1-\mathrm{i}\varepsilon\hat{H}(t_j;\hat{q},\hat{p})]|q_{k-1}\rangle \quad (5\text{-}1\text{-}30)$$

假设

$$\hat{H}(t;\hat{q},\hat{p})=\frac{1}{2m}\hat{p}^2+\hat{V}(t,\hat{q}) \quad (5\text{-}1\text{-}31)$$

类似于(5-1-7)式以后的计算，对显含时间的 Hamilton 算符，仍然可得

$$\langle q',t'|q,t\rangle =$$

$$\int\mathscr{D}q(\tau)\mathscr{D}p(\tau)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'}[p(\tau)\dot{q}(\tau)-\right.$$

$$\left.H(\tau;q(\tau),p(\tau))]\mathrm{d}\tau\right\} \quad (5\text{-}1\text{-}32)$$

路径积分形式表述中一个突出的优点是传播函数或转换矩阵元中已不再出现算符(Q-数)，而出现的是经典的数(C-数). 这时，经典 Lagrange 量中的对称性质就清楚地呈现出来.

上述对一维量子力学的路径积分形式，很容易将其推广到 r 个自由度系统. 设系统的广义坐标为 $q^1,q^2,\cdots,q^r$，对应的广义动量为 $p_1,p_2,\cdots,p_r$，系统的 Hamilton 量为 $H(q^i,p_i)$，此时转换矩阵元

$$\langle q^{1\prime},\cdots,q^{r\prime},t'|q^1,\cdots,q^r,t\rangle =$$

$$\int\prod_{j=1}^{r}\mathscr{D}q^j\mathscr{D}p_j\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}[p_i\dot{q}^i-H(q,p)]\mathrm{d}\tau\right\} \quad (5\text{-}1\text{-}33)$$

当给定的 Hamilton 量 $H(q,p)$ 中对每个自由度 p_i 的 Gauss 积分都可积出时，相空间中的路径积分(5-1-33)式可化为位形空间中的路径积分，即

$$\langle q'_1,q'_2,\cdots,q'_r,t'|q_1,q_2,\cdots,q_r,t\rangle =$$

$$\int\prod_{j=1}^{r}\mathscr{D}q_j\exp\{\mathrm{i}I[q]\} \quad (5\text{-}1\text{-}34)$$

式中

$$I[q] = I[q_1, \cdots, q_r] = \int_t^{t'} \mathrm{d}t L(q_1, \cdots, q_r; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_r) \tag{5-1-35}$$

应该指出的是，位形空间中的路径积分(5-1-18)式不是普遍的形式，相空间中的路径积分(5-1-13)式才是普遍的形式. 例如：

$$H(q,p) = \frac{1}{2}K^2(q)p^2 + V(q) \tag{5-1-36}$$

由此得

$$p\dot{q} - H = -\frac{1}{2}(Kp - K^{-1}\dot{q}^2) + L(q,\dot{q}) \tag{5-1-37}$$

式中

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}K^{-2}(q)\dot{q}^2 - V(q) \tag{5-1-38}$$

将(5-1-37)式代入(5-1-13)式并对 p 积分后，得

$$\langle q', t' | q, t\rangle = \int \mathscr{D}q\, K^{-1}(q) \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2} L(q(\tau), \dot{q}(\tau))\mathrm{d}\tau\right\} \tag{5-1-39}$$

这个结果显然与(5-1-18)式不同. 这个例子说明，必须谨慎使用(5-1-18)式，一般情形应该采用(5-1-13)式. 上述情况也可用系统在位形空间中有约束的情况来处理. 例如：设

$$K^{-2}(q) = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(q)}{\mathrm{d}q}\right)^2 \tag{5-1-40}$$

此时(5-1-38)式可用二维系统的 Lagrange 量

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - V(q) \tag{5-1-41}$$

代替，但变量 q_1 和 q_2 之间受

$$\Phi(q_1, q_2) = q_2 - f(q_1) = 0 \tag{5-1-42}$$

约束条件的限制. 这种系统可用 Lagrange 量

$$L' = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) + \lambda\Phi(q_1, q_2) \tag{5-1-43}$$

描述. 式中 λ 为 Lagrange 乘子，它不是动力学变量. 用 L'写出(5-1-39)式，则为

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int \mathscr{D}q_1\, \mathscr{D}q_2\, \mathscr{D}\lambda\, K^{-1}(q)\cdot$$
$$\exp\left\{ i\int_t^{t'} L'(q_1(\tau),q_2(\tau),\dot{q}_1(\tau),\dot{q}_2(\tau),\lambda(\tau))\mathrm{d}\tau \right\} \quad (5\text{-}1\text{-}44)$$

还有某些更复杂的情形，例如 Lagrange 量

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 f(q) \quad (5\text{-}1\text{-}45)$$

由 L 求出 Hamilton 量 H 后，按(5-1-13)式计算转换矩阵元 $\langle q',t'|q,t\rangle$，其结果虽然能表示成(5-1-18)式的形式，但其中 I 应改为 I_{eff}. L_{eff}为有效 lagrange 量 I_{eff}所相应的作用量[22]，而有效 Lagrange 量和(5-1-45)式是不同的.

§ 5-2 路径积分量子化与算符形式正则量子化

§ 5-1 中已从算符形式的正则量子化导出了路径(泛函)积分量子化的形式，即(5-1-13)式. 在路径积分量子化的表达式中，只出现了经典作用量，而不引入算符；反过来，利用路径积分可以得到通常算符形式的正则量子化，即由路径积分形式可导出 Schrödinger 方程和正则对易关系.

现考虑一维情形的量子力学. 为了与通常量子力学中记号一致，将坐标记为 x，相应正则共轭动量记为 p. Feynaman 早先采用的路径积分(泛函积分)(5-1-18)式，实际上可由下面两点基本假设导出. 首先，假设各种可能的路径 $x(t)$都有相等的概率，且其概率幅的绝对值相等，但位相可能不同. 其概率幅为

$$\Phi[x(t)] = c\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}I[x(t)]} \quad (5\text{-}2\text{-}1)$$

式中：c 为常数；$I[x(t)]$ 代表路径 $x(t)$ 相对应的作用量. 其次，假

定是叠加原理，用$K(b,a)$代表t_a时刻位于x_a的粒子到t_b时刻位于x_b的概率幅，那么

$$K(b,a) = \Sigma\Phi[x(t)] \tag{5-2-2}$$

求和并对$a(=(t_a,x_a))$到$b(=(t_b,x_b))$的一切可能路径施行. 这里$K(b,a)$就是传播函数$K(x_b,t_b;x_a,t_a)$. $K(b,a)$的模的平方就是a到b的概率. 特别要注意的是，这里是各路径的概率幅相加，而不是概率相加. 设t_c为$t_a<t_c<t_b$的某时刻，粒子位于x_c，由a到c和由c到b是相继发生的两个事件. 因此，由a经c到b的概率幅为

$$K(b,a) = \int K(b,c)K(c,a)\mathrm{d}x_c \tag{5-2-3}$$

这里对所有x_c求积分包括了由a到b的各种可能路径. 将时间区间(t_a,t_b)和空间区间(x_a,x_b)分为许多小网格，利用(5-2-3)式，将(5-2-3)式中对各种可能路径求和，就过渡到对各种路径的连续积分(5-1-18)式，即路径积分或泛函积分(5-1-18)式.

在量子力学中，描述系统状态的波函数$\psi(x,t)$是代表在t时刻粒子位于x处的概率幅，而传播函数$K(x,t;x_0,t_0)$则表示t_0时刻位于x_0处的粒子到t时刻位于x处的概率幅. 这样从$K(x,t;x_0,t_0)$关于x、t的函数关系来看，它实际上也是一个波函数，不过它比$\psi(x,t)$包含了更多的信息. 因为这个波函数所描述的状态是初始时刻t_0粒子处于x_0的状态，不妨将它记为

$$K(x,t;x_0,t_0) = \psi(x,t) \tag{5-2-4}$$

由(5-2-3)式有

$$K(x,t;x_0,t_0) = \int K(x,t;x_1,t_1)K(x_1,t_1;x_0,t_0)\mathrm{d}x_1 \tag{5-2-5}$$

将(5-2-4)式代入(5-2-5)式，得

$$\psi(x,t) = \int K(x,t;x_1,t_1)\psi(x_1,t_1)\mathrm{d}x_1 \tag{5-2-6}$$

(5-2-6)式是根据特殊状态的波函数(5-2-4)式得到的，具体地说，这个特殊状态就是t_0时刻粒子处于x_0的状态. 由于(5-2-6)式是关

于 ψ 的线性方程，对 ψ 做任意线性组合后仍满足同一方程. 因此，(5-2-6) 式中的 ψ 可以视为是任意状态的波函数.

现考虑粒子在势场 $V(t,x)$ 中的运动. Lagrange 量

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(t,x) \tag{5-2-7}$$

当 $t'' - t' = \varepsilon$ 很小时，$K(x'',t'';x',t')$ 可写为

$$K(x'',t'';x',t') = \frac{1}{N}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\left[\frac{m(x''-x')^2}{2\varepsilon^2} - V\left(t' + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{x''+x'}{2}\right)\right]\right\} \tag{5-2-8}$$

将(5-2-8) 式代入(5-2-6) 式得

$$\psi(x'',t'+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{N}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\left[\frac{m(x''-x')^2}{2\varepsilon^2} - V\left(t' + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{x''+x'}{2}\right)\right]\right\}\psi(x',t')\mathrm{d}x' \tag{5-2-9}$$

如果 $x''-x'$ 很大，则(5-2-9)式右端被积函数中的第一个因子随 x' 的变化而迅速振荡，而第二个因子是一个平滑函数，因而整个积分结果为 0. 所以，可取 $x'=x''+\alpha$，其中 α 为一个小量. 于是(5-2-9) 式可写为

$$\psi(x'',t'+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{N}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\left[\frac{m\alpha^2}{2\varepsilon^2} - V\left(t' + \frac{\varepsilon}{2}, x'' + \frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}\cdot \psi(x''+\alpha,t')\mathrm{d}\alpha \tag{5-2-10}$$

记 $x'' = x, t' = t$，将(5-2-10) 式对 ε 和 α 展开并利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha^2/2\hbar\varepsilon}\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-2-11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha^2/2\hbar\varepsilon}\alpha\mathrm{d}\alpha = 0 \tag{5-2-12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha^2/2\hbar\varepsilon}\alpha^2\mathrm{d}\alpha = \frac{2\hbar\varepsilon}{m}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-2-13}$$

比较 ε 同次项的系数,得

$$N = \left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-2-14}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = \hat{H}\psi \tag{5-2-15}$$

(5-2-15) 式就是波函数 $\psi(x,t)$ 所满足的 Schrödinger 方程.

量子力学中正则变量之间的对易关系也可由路径积分形式导出. 为了记号简化,以下取 $\hbar=1$. 在量子力学中,动量算符 $\hat{p}$ 在 x 表象中的形式可取为

$$\langle x|\ \hat{p}\ |x'\rangle = -i\frac{d}{dx}\langle x|x'\rangle \tag{5-2-16}$$

在路径积分形式中,坐标 x 的共轭动量 p 适合

$$\langle x'',t''|\ \hat{p}\ (t'')|x',t'\rangle = -i\frac{d}{dx''}\langle x'',t''|x',t'\rangle \tag{5-2-17}$$

这个关系与正则形式是一致的. 事实上,利用(5-1-18) 式有

$$\begin{aligned}
&\langle x''+\xi,t''|x',t'\rangle = \\
&\langle x'',t''|x',t'\rangle + \xi\frac{d}{dx''}\langle x'',t''|x',t'\rangle = \\
&\frac{1}{N}\int \mathscr{D}x\left(1 + i\xi\frac{\partial L(t'')}{\partial \dot{x}}\right)\exp\{iI[x]\} = \\
&\langle x'',t''|x',t'\rangle + i\xi\langle x'',t''\left|\frac{\partial \hat{L}(x'')}{\partial \dot{x}}\right|x',t'\rangle
\end{aligned} \tag{5-2-18}$$

根据运动方程,由(5-2-18) 式就得到(5-2-17) 式.

此外,算符 $\hat{x}\ (t'')$ 在 $\langle x'',t''|$ 和 $|x',t'\rangle$ 之间的矩阵元

$$\langle x'',t''|\ \hat{x}\,(t'')|x',t'\rangle = x''\langle x'',t''|x',t'\rangle \tag{5-2-19}$$

由(5-2-17)、(5-2-19) 式有

$$\begin{aligned}
&-i\frac{d}{dx''}\langle x'',t''|\ \hat{x}\ (t'')|x',t'\rangle = \\
&\langle x'',t''|\ \hat{p}\ (t'')\ \hat{x}\ (t'')|x',t'\rangle =
\end{aligned}$$

$$-\mathrm{i}\langle x'',t''|x',t'\rangle+\langle x'',t''|\hat{x}(t'')\hat{p}(t'')|x',t'\rangle \tag{5-2-20}$$

从而得到正则变量$\hat{x}$和$\hat{p}$之间的对易关系，即

$$\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x}=\mathrm{i} \tag{5-2-21}$$

可见，路径积分量子化形式和正则（算符）量子化形式是等效的.

算符$\hat{q}(t)$在态矢$|q',t'\rangle$和$|q'',t''\rangle$之间的矩阵元也可用路径积分来表示. 设$t'<t<t''$，将区间(t',t'')做n等份，并设其中一个分点$t_i=t$. 记$t_0=t'$，$t_n=t''$，于是

$$\begin{aligned}&\langle q'',t''|\hat{q}(t)|q',t'\rangle=\\&\quad\int\langle q'',t''|q_{n-1},t_{n-1}\rangle\langle q_{n-1},t_{n-1}|q_{n-2},t_{n-2}\rangle\cdots\cdot\\&\quad\langle q_{i+2},t_{i+2}|q_{i+1},t_{i+1}\rangle\langle q_{i+1},t_{i+1}|\hat{q}(t_i)|q_i,t_i\rangle\cdots\cdot\\&\quad\langle q_1,t_1|q',t'\rangle\prod_{j=1}^{n-1}\mathrm{d}q_j\end{aligned} \tag{5-2-22}$$

由于$|q_i,t_i\rangle$是$\hat{q}(t_i)$的本征态，所以，

$$\hat{q}(t_i)|q_i,t_i\rangle=q(t_i)|q_i,t_i\rangle \tag{5-2-23}$$

将(5-2-23)式代入(5-2-22)式，用§5-1中类似的讨论可得

$$\begin{aligned}&\langle q'',t''|\hat{q}(t)|q',t'\rangle=\\&\quad\int\mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,q(t)\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}[p\dot{q}-H(q,p)]\mathrm{d}t\right\}\end{aligned} \tag{5-2-24}$$

同样的讨论可以求出算符乘积的矩阵元的路径积分，即

$$\begin{aligned}&\langle q'',t''|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|q',t'\rangle=\\&\quad\int\mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,q(t_1)\,q(t_2)\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}[p\dot{q}-H(p,q)]\mathrm{d}t\right\}\end{aligned} \tag{5-2-25}$$

式中T代表编时乘积，它的定义是

$$T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]=\begin{cases}\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)，当\ t_1>t_2\\\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1)，当\ t_1<t_2\end{cases} \tag{5-2-26}$$

推广到多个算符积的情形，有

$$\langle q'',t''|T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]|q',t'\rangle=$$

$$\int \mathscr{D}q\ \mathscr{D}p\ q(t_1)\cdots q(t_n)\ \exp\left\{ i\int_{t'}^{t''}[p\dot{q} - H(q,p)]dt \right\}$$

(5-2-27)

对于算符$\hat{q}(t)$和$\hat{p}(t)$的任意(算符)函数$\hat{F}$，有[23]

$$\langle q'',t''|\hat{F}|\hat{q},t'\rangle = \int \mathscr{D}q\ \mathscr{D}p\ F(q(t),p(t)) \cdot \exp\left\{ i\int_{t'}^{t''}[p\dot{q} - H(q,p)]dt \right\} \quad (5\text{-}2\text{-}28)$$

式中 F 为$\hat{F}$的经典极限. 出现在 § 5-1 和 § 5-2 中的 Hamilton 量 H 实际上就是系统的正则 Hamilton 量 H_c.

§ 5-3 Bose 系统的复数表示

本节介绍路径积分的另一种形式，先考虑一维 Bose 系统，给出其复数表示(或全纯表示)的路径积分，这种形式易于推广到 Fermi 子系统. 为此，引入复数 z^* 和 z 来代替坐标 q 和动量 p[24]. 它们之间的关系为

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip),\ z^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip) \quad (5\text{-}3\text{-}1)$$

式中 ω 为任意常数. 对谐振子情况来说，取 ω 为谐振子的频率. 在量子力学中，z 和 z^* 相应的算符分别记为$\hat{a}$和$\hat{a}^+$;$\hat{a}$ 和$\hat{a}^+$互为厄米. 由$\hat{p}$和$\hat{q}$ 的对易关系可得如下对易关系：

$$[\hat{a},\hat{a}^+] = 1,\ [\hat{a},\hat{a}] = [\hat{a}^+,\hat{a}^+] = 0 \quad (5\text{-}3\text{-}2)$$

这些对易关系可在解析函数空间中表达出来. 以 z^* 的解析函数 $f(z^*)$ 表征一个态矢，算符$\hat{a}^+$和$\hat{a}$对 $f(z^*)$ 的作用为

$$\hat{a}^+ f(z^*) = z^* f(z^*),\ \hat{a} f(z^*) = \frac{d}{dz^*} f(z^*) \quad (5\text{-}3\text{-}3a)$$

即

$$\hat{a}^{+}=z^{*},\quad \hat{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{*}} \tag{5-3-3b}$$

显然,(5-3-3) 式满足对易关系(5-3-2) 式.这时为使$\hat{a}$和$\hat{a}^{+}$满足互为共轭的条件,要适当定义态矢的内积.其定义可取为

$$(f_1,f_2)=\int f_1(z^{*})^{*}f_2(z^{*})\mathrm{e}^{-z^{*}z}\frac{\mathrm{d}z^{*}\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} \tag{5-3-4}$$

式中 $z=x+\mathrm{i}y$,其积分测度理解为

$$\frac{\mathrm{d}z^{*}\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}=\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi} \tag{5-3-5}$$

积分(5-3-4)式可理解为在 xy 平面上的积分.利用解析函数的 Cauchy-Riemann 条件

$$\frac{\mathrm{d}f_1(z^{*})^{*}}{\mathrm{d}z^{*}}=0,\quad \frac{\mathrm{d}f_2(z^{*})}{\mathrm{d}z}=0 \tag{5-3-6}$$

由(5-3-4) 式可得

$$\begin{aligned}(f_1,z^{*}f_2)=&\int f_1(z^{*})^{*}\ z^{*}f_2(z^{*})\mathrm{e}^{-z^{*}z}\frac{\mathrm{d}z^{*}\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}=\\&-\int f_1(z^{*})^{*}f_2(z^{*})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{-z^{*}z}\frac{\mathrm{d}z^{*}\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}=\\&\int\left(\frac{\mathrm{d}f_1(z^{*})}{\mathrm{d}z^{*}}\right)^{*}f_2(z^{*})\mathrm{e}^{-z^{*}z}\frac{\mathrm{d}z^{*}\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}=\\&\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}z^{*}},f_2\right)\end{aligned} \tag{5-3-7}$$

类似有

$$\left(f_1,\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}z^{*}}\right)=(z^{*}f_1,f_2) \tag{5-3-8}$$

因此 z^{*}和$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{*}}$在上述内积下互为共轭.

任意解析函数 $f(a^{*})$ 可表示为下列单项式的线性组合:

$$f_n(z^*) = \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} \tag{5-3-9}$$

这些单项式在(5-3-4)式定义的内积下是正交规一的. 事实上,取复 z 平面的极坐标 $z=\rho e^{i\theta}$,得

$$(f_m, f_n) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}}\int z^m (z^*)^n e^{-z^* z} \frac{dz^* dz}{2\pi i} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n!m!}} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \rho\, d\rho \int_0^\pi d\theta \rho^{n+m} e^{i\theta(m-n)} e^{-\rho^2} = \delta_{mn} \tag{5-3-10}$$

在上述表示中,可用两种方式表述一个算符.

首先,任一算符$\hat{A}$可表示为一个含核 $A(z^*, z)$ 的积分,即

$$(\hat{A} f)(z^*) = \int A(z^*, z') f(z^*) e^{-z' z^*} \frac{dz' dz^*}{2\pi i} \tag{5-3-11}$$

设记

$$A_{nm} = (f_n, \hat{A} f_m) \tag{5-3-12}$$

那么,核 $A(z^*, z)$ 可表示为算符$\hat{A}$ 在基 f_n 中的矩阵元的形式,即

$$A(z^*, z') = \sum_{m,n} \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} A_{mn} (z^*)^m (z')^n \tag{5-3-13}$$

并称 $A(z^*, z^*)$为矩阵形式算符$\hat{A}$的核. 两个算符乘积$\hat{A}=\hat{A}_1\hat{A}_2$的核为

$$A(z^*, z') = \int A_1(z^*, \xi) A_2(\xi^*, z') e^{-\xi^* \xi} \frac{d\xi^* d\xi}{2\pi i} \tag{5-3-14}$$

其次,算符$\hat{A}$ 的另一种表示,是将它写成正规乘积的形式,即

$$\hat{A} = \sum_{m,n} K_{mn} (\hat{a}^+)^m (\hat{a})^n \tag{5-3-15}$$

式中$\hat{a}^+$算符排在 $\hat{a}$ 算符的左边. 引入两个独立复变数 z' 和 z^* 的函数

$$K(z^*, z') = \sum_{m,n} K_{mn} (z^*)^m z'^n \tag{5-3-16}$$

不难证明,核 $A(z^*, z')$ 与 $K(z^*, z')$ 有下列关系[24]:

$$A(z^*, z') = e^{z^* z'} K(z^*, z') \tag{5-3-17}$$

设 Hamilton 算符 $\hat{H}$ 已表示为$\hat{a}^+$及$\hat{a}$的正规乘积的形式，即

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{a}^+, \hat{a}, t) \tag{5-3-18}$$

$\hat{H}$ 可以显含时间. 设时间演化算符为

$$\hat{U}(\Delta t) = \exp\{-\mathrm{i}\hat{H}\Delta t\} \tag{5-3-19}$$

其核记为 $U(z^*, z, \Delta t)$. 由(5-3-17) 式对于小量 Δt 有

$$U(z^*, z, \Delta t) = \exp\{z^* z - \mathrm{i}H(z^*, z, t)\Delta t\} \tag{5-3-20}$$

对有限区间 $t''-t'=N\Delta t=N\varepsilon$, $\hat{U}$ 算符可写为

$$\hat{U}(\hat{a}^+, \hat{a}, t'', t') = \lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N-1}\exp\{-\mathrm{i}\hat{H}(\tau_j)\varepsilon\} =$$

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N-1}\hat{U}(\hat{a}^+, \hat{a}, \tau_j+\varepsilon, \tau_j) \tag{5-3-21}$$

由 (5-3-14)、(5-3-20) 式得$\hat{U}(\hat{a}^+, \hat{a}, t'', t')$ 的核

$$\begin{aligned} U(z^{*\prime}, z, t'', t') = \\ & \lim_{N\to\infty}\int\exp\{z_N^* z_{N-1} - z_{N-1}^* z_{N-1} + z_{N-1}^* z_{N-2} - \\ & z_{N-2}^* z_{N-2} + \cdots - z_1^* z_1 + z_1^* z_0\}\cdot \\ & \exp\{-\mathrm{i}\varepsilon[H(z_N^*, z_{N-1}, \tau_N) + \\ & H(z_{N-1}^*, z_{N-2}, \tau_{N-1}) + \cdots + \\ & H(z_1^*, z_0, \tau_1)]\}\prod_{j=1}^{N-1}\frac{\mathrm{d}z_j^*\,\mathrm{d}z_j}{2\pi\mathrm{i}} \end{aligned} \tag{5-3-22}$$

式中 $z_0=z, z_N^*=z^{*\prime}$. (5-3-22)式可简写为

$$\begin{aligned} U(z^{z'}, z, t'', t') = & \int^{z^{*\prime}}\int_z \mathscr{D}z^*(\tau)\,\mathscr{D}z(\tau)\,\exp\left\{\frac{1}{2}[z^*(t'')z(t'') + \right. \\ & \left. z^*(t')\,z(t')]\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\dot{z}^* z - z^*\dot{z}) - \right.\right. \\ & \left.\left. H(z^*, z, \tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\} \end{aligned} \tag{5-3-23}$$

式中

$$\mathscr{D}z^*(\tau)\mathscr{D}z(\tau) = \prod_{j=1}^{N-1}\frac{\mathrm{d}z_j^*\,\mathrm{d}z_j}{2\pi\mathrm{i}} \tag{5-3-24}$$

(5-3-23) 式中 $z(\tau)$ 和 $z^*(\tau)$ 是独立的路径，它们不是互为复共轭. z 是 $z(\tau)$ 的初值，而 $z^*(\tau)$ 没有初值条件；同样，$z^{*\prime}$ 是 $z^*(\tau)$ 的终

值，而 $z(\tau)$ 没有终值条件.

由(5-3-1) 式可得

$$\frac{1}{2}\left(p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}-q\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}t}-z^*\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \tag{5-3-25}$$

可见，(5-3-23)式中第二个指数恰为经典作用量，(5-3-23)式与相空间路径积分(5-1-32)式相似，其中多出的因子

$$\exp\left\{\frac{1}{2}[z^*(t'')z(t'')+z^*(t')z(t')]\right\}$$

来源于不同的边界条件.

§5-4 Fermi 系统的 Grassmann 数表示

Fermi 场算符的经典对应为 Grassmann 数. 先考虑 Fermi 型算符的一维情况. 设算符 $\hat{b}$ 和 $\hat{b}^+$满足反对易关系

$$[\hat{b},\hat{b}^+]_+=\hat{b}\hat{b}^++\hat{b}^+\hat{b}=0,\ \hat{b}^+\hat{b}^+=0,\ \hat{b}\hat{b}=0 \tag{5-4-1}$$

考虑两反对易 C-数 b 和 b^*，它们适合

$$bb^*+b^*b=0,\ (b^*)^2=0,\ b^2=0 \tag{5-4-2}$$

满足(5-4-2)式的 b 和 b^* 是二阶 Grassmann 代数的基，此代数的任一元素可写为

$$f(b^*,b)=f_{00}+f_{01}b+f_{10}b^*+f_{11}bb^* \tag{5-4-3}$$

式中 f_{00}、f_{01}、f_{10}、f_{11} 均为复数. 由 $(b^*)^2=0$ 可得 $f(b^*)$ 的最一般形式，即

$$f(b^*)=f_0+f_1b^* \tag{5-4-4}$$

将算符$\hat{b}^+$和$\hat{b}$取为

$$\hat{b}^+f(b^*)=b^*f(b^*),\ \hat{b}f(b^*)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}f(b^*) \tag{5-4-5}$$

的形式，其中微商由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}f(b^*)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}(f_0+f_1b^*)=f_1 \tag{5-4-6}$$

确定. 由(5-4-5) 式不难验证，对易关系(5-4-1) 式自动满足.

为了确定两个Grassmann变量函数的内积，首先需要定义Grassmann代数上的积分，并将内积取为与(5-3-4)式相似的形式：

$$(f',f)=\int f'(b^*)^* f(b^*)\mathrm{e}^{-b^*b}\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b \tag{5-4-7}$$

由(5-4-4)、(5-4-7)式可得

$$(f',f)=\int[f'^*_0 f_0+f'^*_0 f_1 b^*+f_0 f'^*_1 b+(f'^*_1 f_1+f'^*_0 f_0)bb^*]\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b \tag{5-4-8}$$

式中 $\mathrm{d}b$ 和 $\mathrm{d}b^*$ 反对易，同时也与 b 和 b^* 反对易. 由(5-4-4)式，可知只有两个独立的函数

$$\psi_0=1,\quad \psi_1=b^* \tag{5-4-9}$$

为了保证 ψ_0 和 ψ_1 的正交归一性，定义 Grassmann 数的积分为

$$\int b\mathrm{d}b=\int b^*\mathrm{d}b^*=1 \tag{5-4-10}$$

$$\int \mathrm{d}b=\int \mathrm{d}b^*=0 \tag{5-4-11}$$

由(5-4-7)、(5-4-10)、(5-4-11)式不难验证：

$$(\psi_0,\psi_0)=\int \mathrm{e}^{-b^*b}\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b=\int(1-b^*b)\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b=1 \tag{5-4-12}$$

$$(\psi_0,\psi_1)=\int b^*\mathrm{e}^{-b^*b}\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b=0 \tag{5-4-13}$$

$$(\psi_1,\psi_1)=\int bb^*\mathrm{e}^{-b^*b}\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b=1 \tag{5-4-14}$$

由(5-4-8)、(5-4-10)、(5-4-11)式不难验证，b^* 和 $\mathrm{d}/\mathrm{d}b^*$ 在内积下是相互共轭的. 事实上，

$$(f',b^*f)=\int(f'^*_0 f_0 b^*+f_0 f'^*_1 bb^*)\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b=f_0 f'^*_1 \tag{5-4-15}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}f',f\right)=\int f'_1(f_0+f_1b^*)(1-b^*b)\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b=f_0 f'^*_1 \tag{5-4-16}$$

与和 Bose 系统类似，任一算符 $\hat{A}$ 可表示为一个含核 $A(b^*,b)$ 的

积分，即

$$(\hat{A} f)(b^*) = \int A(b^*, b) f(b^*) \mathrm{e}^{-b^* b} \mathrm{d}b^* \mathrm{d}b \quad (5\text{-}4\text{-}17)$$

式中

$$A(b^*, b) = \sum_{mn} A_{mn} (b^*)^m (b)^n =$$

$$A_{00} + A_{10} b^* + A_{01} b + A_{11} b^* b \quad (5\text{-}4\text{-}18)$$

$$A_{mn} = (\psi_m, \hat{A} \psi_n) \qquad (m, n = 0, 1) \quad (5\text{-}4\text{-}19)$$

算符$\hat{A}$也可以写为正规乘积的形式，即

$$\hat{A} = K_{00} + K_{10} \hat{b}^+ + K_{01} \hat{b} + K_{11} \hat{b}^+ \hat{b} \quad (5\text{-}4\text{-}20)$$

引入函数

$$K(b^*, b) = K_{00} + K_{10} b^* + K_{01} b + K_{11} b^* b \quad (5\text{-}4\text{-}21)$$

不难验证，它与算符$\hat{A}$的核有以下关系：

$$\mathrm{e}^{b^* b} K(b^*, b) = A(b^*, b) \quad (5\text{-}4\text{-}22)$$

上述结果容易推广到高维情形. 设有 $2n$ 个算符$\hat{b}_i$和$\hat{b}_i^+$$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足反对易关系

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^+]_+ = \delta_{ij}, \; [\hat{b}_i, \hat{b}_j]_+ = [\hat{b}_i^+, \hat{b}_j^+]_+ = 0 \quad (5\text{-}4\text{-}23)$$

引入 $2n$ 个相互反对易的 Grassmann 代数的元素 b_i 和 b_i^* $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 态矢由 $f(b^*)$ 来表征，并将其表示为

$$\hat{b}_i^+ = b_i^*, \quad \hat{b}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b_i^*} \quad (5\text{-}4\text{-}24)$$

在求微商中，要区分左微商和右微商. 态矢的内积定义为

$$(f', f) = \int (f'(b^*))^* f(b^*) \mathrm{e}^{-\sum_i b_i^* b_i} \prod_j \mathrm{d}b_j^* \mathrm{d}b_j \quad (5\text{-}4\text{-}25)$$

其中所有的量 b_i^*、b_i、$\mathrm{d}b_i^*$ 和 $\mathrm{d}b_i$ 均是相互反对易的. $2n$ 阶 Grassmann 代数上的积分由

$$\int b_i \, \mathrm{d}b_i = \int b_i^* \mathrm{d}b_i^* = 1, \; \int \mathrm{d}b_i = \int \mathrm{d}b_i^* = 0 \quad (5\text{-}4\text{-}26)$$

来定义. 核 $A(b^*, b)$ 与算符正规乘积相应的函数 $K(b^*, b)$ 之间的关系为

$$A(b^*,b)=\mathrm{e}^{\Sigma b_i^* b_i}K(b^*,b) \tag{5-4-27}$$

类似可写出Fermi系统算符$\hat{U}$的核. 将Hamilton算符 $\hat{H}$ 写成正规形式 $\hat{H}=H(\hat{b}^+,\hat{b},t)$,那么,

$$U(b^*,b,t'',t')=\int\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_i b_i^*(t'')b_i(t'')+b_i^*(t')b_i(t')+\right.$$
$$\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\sum_i(\dot{b}_i^*(\tau)b_i(\tau)-b_i^*(\tau)\dot{b}_i(\tau)-\right.$$
$$\left.\left.\mathrm{i}H(b^*(\tau),b(\tau),\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\}\mathscr{D}b_j^*(\tau)\mathscr{D}b_j(\tau) \tag{5-4-28}$$

式中

$$\mathscr{D}b_j^*\mathscr{D}b_j=\prod_j\mathrm{d}b_j^*\mathrm{d}b_j \tag{5-4-29}$$

其边界条件

$$b_j^*(t'')=b_j^{*\prime\prime},\quad b_i(t')=b'_i \tag{5-4-30}$$

为了计算实际问题,下面给出 Grassmann 代数的一个积分性质. 现考虑积分

$$I=\int\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_1^*\mathrm{d}b_2\mathrm{d}b_2^*\cdots\mathrm{d}b_n\mathrm{d}b_n^*\exp\{b_i^*M_{ij}b_j\} \tag{5-4-31}$$

式中:M_{ij}为复数;被积函数可展开为

$$\exp\sum_{i,j}\{b_i^*M_{ij}b_j\}=\prod_i\prod_j(1+b_i^*M_{ij}b_j) \tag{5-4-32}$$

根据 Grassmann 代数积分规则,展开上式不难看出,对积分有贡献的项为

$$\sum_{(j_1\cdots j_n)\text{的排列}}M_{nj_n}M_{n-1j_{n-1}}\cdots M_{1j_1}b_n^*b_{j_n}\cdots b_1^*b_{j_1} \tag{5-4-33}$$

从而得

$$I=\det\boldsymbol{M}=\det|M_{ij}| \tag{5-4-34}$$

§5-5 场论中的路径积分

场是无穷多自由度的连续系统,把连续系统离散化后作为多自由度系统来处理;然后,再过渡到连续极限就可得场论中的路径积分.

这里先讨论正规 Lagrange 量系统. 为了简单，考虑一个实标量场 $\varphi(x)$ 的情形. Lagrange 量

$$L = \int_V \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))\mathrm{d}^3x \tag{5-5-1}$$

将空间区域 V 分为 n_1 个边长为 ε 的小正方格. 设 $\varphi^\alpha(t)$ 为场 $\varphi(x)$ 在第 α 个方格中的平均值，并把它视为场的坐标，即 $\varphi^\alpha(t) \to q^\alpha(t)$. Lagrange 量(5-5-1) 式可写为对所有方格中的贡献求和，即

$$L = \lim_{n_1\to\infty}\sum_{\alpha=1}^{n_1}\varepsilon^3\mathscr{L}_\alpha(\varphi^\alpha(t)(t), \dot{\varphi}^\alpha, \varphi^{\alpha+\delta}(t))$$

式中：$\mathscr{L}_\alpha$ 对 $\varphi^{\alpha+\delta}(t)$ 的依赖是由于将场 $\varphi(x)$ 的空间微商改为差分而引起的；$\varphi^\alpha(t)$ 的共轭正则动量

$$p_\alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}^\alpha(t)} = \varepsilon^3\frac{\partial\mathscr{L}_\alpha}{\partial\dot{\varphi}^\alpha} = \varepsilon^3\pi_\alpha(t) \tag{5-5-2}$$

式中重复指标 α 不求和. 此时 Hamilton 量

$$H = \sum_\alpha p_\alpha\dot{\varphi}^\alpha - L = \sum_\alpha\varepsilon^3\mathscr{H}_\alpha \tag{5-5-3}$$

其中

$$\mathscr{H}_\alpha = \pi_\alpha\dot{\varphi}^\alpha - \mathscr{L}_\alpha \tag{5-5-4}$$

量子化后 $\hat{\varphi}^\alpha(t)(\alpha = 1,2,\cdots,n_1)$ 为算符. 令 $|\varphi^\alpha, t\rangle$ 表示算符 $\hat{\varphi}^\alpha(t)$ 的共同本征态，跃迁(转换)矩阵元$\langle\varphi^{\alpha'}, t'|\varphi^\alpha, t\rangle$ 可按 §5-1 中的讨论求出. 当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi^{\alpha'}, t'|\varphi^\alpha, t\rangle =$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varphi^\alpha}^{\varphi^{\alpha'}}\prod_{\alpha_1=1}^{n_1}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{d}\varphi^{\alpha_1}(\tau_i))\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon^3\mathrm{d}\pi_{\alpha_1}(\tau_i)}{2\pi}\right)\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon^4\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_1=1}^{n_1}\left[\pi_{\alpha_1}(\tau_j)\frac{\varphi^{\alpha_1}(\tau_j) - \varphi^{\alpha_1}(\tau_{j-1})}{\varepsilon} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\mathscr{H}_{\alpha_1}(\pi_\alpha(\tau_j), \varphi^\alpha(\tau_{j-1}), \varphi^{\alpha+\delta}(\tau_{j-1}))\right]\right\} \tag{5-5-5}$$

(5-5-5)式可简记为

$$\langle \varphi'(x), t' | \varphi(x), t \rangle =$$

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi'(x)} \mathscr{D}\varphi \, \mathscr{D}\pi \, \exp\left\{ i \int_t^{t'} d\tau \int d^3x \left[\pi(\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x}, \tau)}{\partial \tau} - \mathscr{H}(\boldsymbol{x}, \tau) \right] \right\} \tag{5-5-6}$$

式中

$$\pi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)}, \quad \mathscr{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathscr{L} \tag{5-5-7}$$

$$\mathscr{D}\varphi \, \mathscr{D}\pi = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \prod_{\alpha_1 = 1}^{n_1} \prod_{i=1}^{n-1} (d\varphi^{\alpha_1}(\tau_i)) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon^3 d\pi_{\alpha_1}(\tau_i)}{2\pi} \right) \tag{5-5-8}$$

π_α 和 $\mathscr{H}_\alpha$ 是 $\pi(x)$ 和 $\mathscr{H}(x)$ 在第 α 个方格中的平均值．

假设 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \mathscr{L}_{\text{in}}(\varphi) \tag{5-5-9}$$

此时的 Hamilton 量密度为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \mathscr{L}_{\text{in}}(\varphi) \tag{5-5-10}$$

将(5-5-10)式代入(5-5-6)式，对 π 的积分为 Gauss 型，求出对 π 的积分后得

$$\langle \varphi'(x), t' | \varphi(x), t \rangle =$$

$$N_0 \int_{\varphi(x)}^{\varphi'(x)} \mathscr{D}\varphi \exp\left\{ i \int_t^{t'} d\tau \int d^3x' \mathscr{L}(\boldsymbol{x}', \tau) \right\} \tag{5-5-11}$$

其中

$$N_0 = \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi i}} \right)^n, \quad \mathscr{D}\varphi = \prod_{\alpha_1=1}^{n_1} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\varepsilon \, d\varphi^{\alpha_1}(\tau_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \right)$$

值得注意的是，(5-5-11)式右端出现的场量 $\varphi(x)$ 不是场算符 $\hat{\varphi}(x)$．对 Bose 场 $\varphi(x)$ 为 C-数，对 Fermi 场 $\varphi(x)$ 为 Grassmann 数．(5-5-11)式为量子场论中的 Feynman 路径积分形式．

由(5-5-11)式场算符 $\hat{\varphi}(x)$在态之间矩阵元的路径积分为

$$\langle \varphi', t' | \hat{\varphi}(x) | \varphi, t \rangle =$$

$$N_0 \int_{\varphi}^{\varphi'} \mathscr{D}\varphi \, \varphi(x) \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x' \, \mathscr{L}(x') \right\} \qquad (5\text{-}5\text{-}12)$$

一般情形有

$$\langle \varphi', t' | T(\hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_n)) | \varphi, t \rangle =$$

$$N_0 \int_{\varphi}^{\varphi'} \mathscr{D}\varphi \, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x' \, \mathscr{L}(x') \right\} \quad (5\text{-}5\text{-}13)$$

式中 T 代表编时乘积．

类似于(5-2-16)式，场算符 $\hat{\varphi}(x)$的共轭动量 $\hat{\pi}(x)$可由

$$\langle \varphi', t' | \hat{\pi}(x') | \varphi, t \rangle = -\mathrm{i} \frac{\delta}{\delta \varphi'(x')} \langle \varphi', t' | \varphi, t \rangle \qquad (5\text{-}5\text{-}14)$$

确定．由上述关系不难导出正则对易关系式．

区分 Bose 场和 Fermi 场两种不同的情形．对于 Bose 场 $\hat{\varphi}(x)$可对表达式

$$\langle \varphi', t' | \hat{\varphi}(x'_2) | \varphi, t \rangle = \varphi'(x'_2) \langle \varphi', t' | \varphi, t \rangle \qquad (5\text{-}5\text{-}15)$$

求泛函微商 $-\mathrm{i}\delta/\delta\varphi'(x'_1)$，注意式中

$$\hat{\varphi}'(x) | \varphi', t \rangle = \varphi'(x) | \varphi', t' \rangle$$

可得

$$\langle \varphi', t' | \hat{\pi}(x'_1) \hat{\varphi}(x'_2) | \varphi, t \rangle = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}'_1 - \boldsymbol{x}'_2) \langle \varphi', t' | \varphi, t \rangle +$$

$$\varphi'(x'_2) \langle \varphi', t' | \hat{\pi}(x'_1) | \varphi, t \rangle = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}'_1 - \boldsymbol{x}'_2) \langle \varphi', t' | \varphi, t \rangle +$$

$$\langle \varphi', t' | \hat{\varphi}(x'_2) \hat{\pi}(x'_1) | \varphi, t \rangle \qquad (5\text{-}5\text{-}16)$$

由(5-5-16)式有

$$[\hat{\pi}(x_1), \hat{\varphi}(x_2)]_- = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \qquad (5\text{-}5\text{-}17)$$

对于 Fermi 场 $\varphi(x)$，由于场的反对易性(5-5-16)式应改为

$$\langle \psi', t' | \hat{\pi}(x'_1) \hat{\psi}(x'_2) | \psi, t \rangle = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}'_1 - \boldsymbol{x}'_2) \langle \psi', t' | \psi, t \rangle -$$

$$\psi'(x'_2)\langle\psi',t'|\hat{\pi}(x'_1)|\psi,t\rangle = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}'_1 - \boldsymbol{x}'_2)\langle\psi',t'|\psi,t\rangle -$$

$$\langle\psi',t'|\hat{\psi}(x'_2)\hat{\pi}(x'_1)|\psi,t\rangle \tag{5-5-18}$$

从而得到反对易关系式

$$[\hat{\pi}(x_1), \hat{\psi}(x_2)]_+ = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \tag{5-5-19}$$

对场论中正规 Lagrange 量描述的系统，Feynman 路径积分形式和算符正则量子化形式之间是等效的．将上面的讨论推广到多个场变量的情况是直接的．

§5-6 Green 函数的生成泛函

利用路径积分形式可以构成 Green 函数的生成泛函．由该生成泛函可导致 Green 函数．

将场论中的跃迁矩阵元(5-5-6)式推广到有外源作用的情形．设在类空曲面 σ'(类空曲面可取 $t=\text{const}$)上场算符 $\hat{\phi}(x)$的本征态记为$|\phi',\sigma'\rangle$，即 x 在 σ' 上时有

$$\hat{\phi}(x)|\phi',\sigma'\rangle = \phi'(x)|\phi',\sigma'\rangle \tag{5-6-1}$$

考虑场 $\phi(x)$与经典外源 $J(x)$有耦合($\phi(x)$可代表不同场的集合，$J(x)$则代表相应的外源)．有外源时的转换矩阵元记为

$$\langle\phi'',\sigma''|\phi',\sigma'\rangle^J = N(\Omega)^{-1}\int_{\phi'}^{\phi''}\mathscr{D}\phi\,\mathscr{D}\pi\,\exp\left\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}[\phi] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,J\,\phi\right\} \tag{5-6-2}$$

式中

$$N(\Omega) = \int_{\phi'}^{\phi''}\mathscr{D}\phi\,\mathscr{D}\pi\,\exp\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}[\phi]\} \tag{5-6-3}$$

$$I^{\mathrm{p}}[\phi] = \int[\pi(x)\,\dot{\phi}(x) - \mathscr{H}(x)]\mathrm{d}^4x \tag{5-6-4}$$

$I^{\mathrm{p}}[\phi]$为包含 σ' 和 σ''的区域 Ω 上场的正则作用量．对于某些特殊

形式的 Lagrange 量，(5-6-2)式中对 π 的积分为 Gauss 型的，作出对 π 的积分后，有

$$\langle \phi'',\sigma'' | \phi',\sigma' \rangle^J = N_0 \int_{\phi'}^{\phi''} \mathscr{D}\phi \exp\left\{ iI[\phi] + i\int d^4x \, J \, \phi \right\} \quad (5\text{-}6\text{-}5)$$

式中

$$I[\phi] = \int \mathscr{L}(x,\phi(x),\partial_\mu \phi(x)) d^4x \quad (5\text{-}6\text{-}6)$$

有外源 $J(x)$ 时场算符 $\hat{\phi}(x)$ 的矩阵元记为

$$\langle \phi'',\sigma'' | \hat{\phi}(x) | \phi',\sigma' \rangle^J = N_0 \int_{\phi'}^{\phi''} \mathscr{D}\phi \, \phi(x) \exp\left\{ iI[\phi] + i\int d^4x \, J \, \phi \right\} \quad (5\text{-}6\text{-}7)$$

于是

$$\langle \phi'',\sigma'' | \hat{\phi}(x) | \phi',\sigma' \rangle^J = \frac{\delta}{i\delta J(x)} \langle \phi'',\sigma'' | \phi',\sigma' \rangle^J \quad (5\text{-}6\text{-}8)$$

一般有

$$\langle \phi'',\sigma'' | T[\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)] | \phi',\sigma' \rangle^J = \frac{1}{(i)^n} \frac{\delta^n \langle \phi'',\sigma'' | \phi',\sigma' \rangle^J}{\delta^n J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \quad (5\text{-}6\text{-}9)$$

将 $\langle \phi'',\sigma'' | \phi',\sigma' \rangle^J$ 视为外源 J 的泛函，在外源 $J=J_0$ 的邻域内展开，有

$$\langle \phi'',\sigma'' | \phi',\sigma' \rangle^J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \frac{\delta^n \langle \phi'',\sigma'' | \phi',\sigma' \rangle^J}{\delta^n J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \bigg|_{J=J_0} \cdot (J(x_1)-J_0)(J(x_2)-J_0)\cdots(J(x_n)-J_0) \quad (5\text{-}6\text{-}10)$$

比较(5-6-9)、(5-6-10)式，得

$$\langle \phi'',\sigma'' | T[\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)] | \phi',\sigma' \rangle^{J_0} = (-i)^n \frac{\delta^n \langle \phi'',\sigma'' | \phi',\sigma' \rangle^J}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \bigg|_{J=J_0} \quad (5\text{-}6\text{-}11)$$

(5-6-10)式表明,有外源时的转换矩阵元$\langle\phi'',\sigma''|\phi',\sigma'\rangle^J$为有外源时算符时序积的矩阵元$\langle\phi'',\sigma''|T[\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)]|\phi',\sigma'\rangle^{J_0}$的生成泛函(母泛函). 如果将有外源时的生成泛函在外源$J(x)=0$的邻域内展开,(5-6-11)式就给出通常算符时序积的矩阵元.

有外源时,真空到真空的转换矩阵元记为$Z[J(x)]$. 如果不考虑多重真空结构[25],由(5-6-11)式有

$$\langle 0|T[\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)]|0\rangle^{J_0}=$$
$$(-\mathrm{i})^n\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=J_0}\qquad(5\text{-}6\text{-}12)$$

将$Z[J]$在$J=J_0$的邻域展开

$$Z[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n\,!}\int\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n G_n^{J_0}(x_1,\cdots,x_n)\cdot$$
$$(J(x_1)-J_0)\cdots(J(x_n)-J_0)\qquad(5\text{-}6\text{-}13)$$

由此

$$G_n^{J_0}(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|T[\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)]|0\rangle^{J_0}=$$
$$(-\mathrm{i})^n\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=J_0}\qquad(5\text{-}6\text{-}14)$$

当外源$J=J_0=0$时,G_n^0就是通常的Green函数G_n;$Z[J]$就是Green函数的生成泛函(母泛函),其中Green函数

$$G_n(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|T[\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)]|0\rangle=$$
$$(-\mathrm{i})^n\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}\qquad(5\text{-}6\text{-}15)$$

由(5-6-15)式给出的Green函数一般包含有连通部分和不连通部分. 在理论和实际应用中,连通Green函数尤为重要. 利用

$$Z[J]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J]}\qquad(5\text{-}6\text{-}16)$$

可定义泛函$W[J]$. 于是有

$$G_n^C(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|T[\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)]|0\rangle=$$

$$(-\mathrm{i})^{n-1}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{5-6-17}$$

$$W[J]=\sum_n \frac{\mathrm{i}^{n-1}}{n!}\int G_n^c(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n \tag{5-6-18}$$

式中：$G_n^c(x_1,\cdots,x_n)$就是具有 n 条外线的连通 Green 函数；$W[J]$就是连通 Green 函数的生成泛函．

§5-7 正规顶角的生成泛函

由连通 Green 函数的生成泛函 $W[J]$可以引入正规顶角及其生成泛函．利用泛函 $W[J]$定义经典场

$$A(x)=\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \tag{5-7-1}$$

在外源 $J(x)=0$ 时，就是 $\hat{\phi}(x)$的真空期待值 v，即

$$A(x)|_{J=0}=\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\bigg|_{J=0}=\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle=v \tag{5-7-2}$$

如果真空不是自发破缺的，那么 $v=0$．利用 Legendre 变换，可引入正规顶角的生成泛函，即

$$\Gamma[A]=W[J]-\int \mathrm{d}^4x\, J(x)\,A(x) \tag{5-7-3}$$

从而有

$$\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A(x)}=\int\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\delta A(x)}\mathrm{d}^4y-\int\frac{\delta J(y)}{\delta A(x)}A(y)\mathrm{d}^4y-J(x)=-J(x) \tag{5-7-4}$$

(5-7-1)式与(5-7-4)式在形式上是对称的．可见(5-7-4)式表明，$\Gamma[A]$在 $J(x)\to 0$ 时是稳定的，且 $A(x)$是泛函微分方程(5-7-4)式的解．由(5-7-2)、(5-7-4)式得

$$\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A(x)}\bigg|_{A=v} = 0 \tag{5-7-5}$$

(5-7-5)式说明 $\hat{\phi}$ 场的真空期待值是 $\Gamma(A)$ 的变分极值．正规顶角的生成泛函 $\Gamma(A)$ 可展开为

$$\Gamma[A] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n \frac{\delta^n\Gamma[A]}{\delta A(x_1)\cdots\delta A(x_n)}\bigg|_{A=v} \cdot (A(x_1) - v)\cdots(A(x_n) - v) \tag{5-7-6}$$

由于(5-7-5)式没有 $n=1$ 的项，而

$$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{\delta^n\Gamma[A]}{\delta A(x_1)\cdots\delta A(x_n)}\bigg|_{A=v} \tag{5-7-7}$$

就是 n 点正规顶角．下面讨论 $\Gamma^{(n)}$ 的意义．

将(5-7-4)式对 $J(y)$ 求泛函微商得

$$\int \frac{\delta^2\Gamma[A]}{\delta A(x)\delta A(z)} \frac{\delta A[z]}{\delta J(y)} d^4z = \int \frac{\delta^2\Gamma[A]}{\delta A(x)\delta A(z)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(y)} d^4z = -\delta^{(4)}(x-y) \tag{5-7-8}$$

定义

$$\Delta'_F(x-z)_J = \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)} \tag{5-7-9}$$

以及它的逆 $(\Delta'_F)^{-1}(z-y)_J$，适合

$$\int \Delta'_F(x-z)_J(\Delta'_F)^{-1}(z-y)_J d^4z = \delta^{(4)}(x-y) \tag{5-7-10}$$

由(5-7-8)～(5-7-10)式得

$$-\frac{\delta^2\Gamma[A]}{\delta A(x)\delta A(y)} = (\Delta'_F)^{-1}(x-y) \tag{5-7-11}$$

由(5-7-9)式可知，当 $J=0$ 时，

$$-i\Delta'_F(x-y)_{J=0} = -i\Delta'_F(x-y) \tag{5-7-12}$$

是 $A(x)$场传播函数(传播子). 因此,

$$-\left.\frac{\delta^2\Gamma[A]}{\delta A(x)\delta A(y)}\right|_{A=v} = (\Delta'_F)^{-1}(x-y) \qquad (5\text{-}7\text{-}13)$$

即 $-\mathrm{i}\left.\frac{\delta^2\Gamma[A]}{\delta A(x)\delta A(y)}\right|_{A=v}$是传播子的逆.

由(5-7-1)式有

$$\int \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta J[z]}{\delta A(y)}\mathrm{d}^4 z = \delta^{(4)}(x-y) \qquad (5\text{-}7\text{-}14)$$

对(5-7-14)式关于 $A(z)$取泛函微商,并利用(5-7-4)式得

$$\int \mathrm{d}^4 y' \mathrm{d}^4 z' \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y')\delta J(z')}\frac{\delta J(y')}{\delta A(y)}\frac{\delta J(z')}{\delta A(z)} -$$

$$\int \mathrm{d}^4 y' \mathrm{d}^4 z' \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y')}\frac{\delta^3 \Gamma[A]}{\delta A(y')\delta A(y)\delta A(z)} = 0$$

(5-7-15)

将(5-7-15)式两端乘以 Δ'_{FJ}并进行积分,利用(5-7-4)、(5-7-9)~(5-7-11)式可得

$$(-\mathrm{i})^2\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x)\ \delta J(y)\ \delta J(z)} =$$

$$\int \mathrm{d}^4 x'\ \mathrm{d}^4 y'\ \mathrm{d}^4 z' (-\mathrm{i})\ \Delta'_F(x-x')_J\ \cdot$$

$$(-\mathrm{i})\ \Delta'_F(y-y')_J(-\mathrm{i})\Delta'_F(z-z')_J\ \cdot$$

$$\mathrm{i}\frac{\delta^3\Gamma[A]}{\delta A(x')\ \delta A(y')\ \delta A(z')} \qquad (5\text{-}7\text{-}16)$$

采用简化记号,用 $i,j,k,\cdots$表示时空指标和场分量指标,并对重复指标代表求和或积分(对连续指标). (5-7-16)式可简记为

$$(-\mathrm{i})^2\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J_p\ \delta J_s\ \delta J_l} = \mathrm{i}\frac{\delta^3\Gamma[A]}{\delta A_i\ \delta A_j\ \delta A_k}\cdot(-\mathrm{i})\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_i\ \delta J_p}\ \cdot$$

$$(-\mathrm{i})\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_k\ \delta J_l}\cdot(-\mathrm{i})\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_j\ \delta J_s} \qquad (5\text{-}7\text{-}17)$$

当 $J=0, A=v$ 时,(5-7-17)式为

$$G_3^c(p,s,l) = \mathrm{i}\Gamma^{(3)}(i,j,k) \cdot \\ \mathrm{i}\Delta_F(i,p) \cdot \mathrm{i}\Delta_F(k,l) \cdot \mathrm{i}\Delta_F(j,s) \tag{5-7-18}$$

这就表明，$\mathrm{i}\Gamma^{(3)}$是去掉了 3 条外线的连通 Green 函数 G_3^c，它是单粒子不可约 3 点顶角．一般来说，单粒子不可约 n 点顶点是去掉外线传播子且不能通过切断一条内线而分成两个不连通部分的 n 点 Green 函数，或称为 n 点正规顶角．用归纳法可以证明(5-7-7)式中的 $\Gamma^{(n)}$就是 n 点正规顶角．

在 Green 函数的生成泛函的路径积分中，出现的是经典的量、经典的场函数以及正则动量、经典的 Lagrange 量或经典的 Hamilton 量．但是，从所导出的 Green 函数、正规顶角等描述的却是量子化过程．正如前面所讨论的，由路径积分也可导出正则对易关系和运动方程，这种理论(路径积分量子化)在现代场论中有重要的应用．

实际计算 Green 函数的生成泛函 $Z[J]$和连通 Green 函数的生成泛函$W[J]$以及正规顶角的生成泛函 $\Gamma[A]$都是很困难的．因为只有 Ganss 型的泛函积分才能精确算出．所以除自由场外，凡是有相互作用的场通常都只能用微扰论方法做近似计算．下面以 ϕ^4 场为例说明一种近似计算方法，这种方法也适用于计算其他量子场．

例如：一个实标量场 ϕ 的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{5-7-19}$$

系统 Green 函数的生成泛函(不计归一化因子)

$$Z[J] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J]} = \\ \int\mathscr{D}\phi \exp\left\{\mathrm{i}I[\phi] + \mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\, J(x)\,\phi(x)\right\} \tag{5-7-20}$$

分部积分后，有

$$I[\phi] = \int\mathrm{d}^4x\mathscr{L} = \frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\phi\left(\partial^2 - \mu^2 - \frac{\lambda}{2}\phi^2\right)\phi \tag{5-7-21}$$

在 $\phi_0(x)$附近展开 $I[\phi]+\int d^4xJ(x)\phi(x)$，则有

$$I[\phi]+\int d^4xJ(x)\phi(x)=$$

$$I[\phi_0]+\int d^4xJ(x)\phi_0(x)+\int d^4x\left(\frac{\delta I}{\delta\phi_0}+J(x)\right)\cdot$$

$$(\phi(x)-\phi_0(x))+\frac{1}{2}\int d^4x d^4y\,\frac{\delta^2 I}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\cdot$$

$$(\phi(x)-\phi_0(x))(\phi(y)-\phi_0(y))+\cdots \tag{5-7-22}$$

选取 ϕ_0 使其适合条件(最陡下降法)

$$\frac{\delta I}{\delta\phi_0}+J(x)=0 \tag{5-7-23}$$

由(5-7-23)式可以确定 ϕ_0 或至少可用微扰法解出 ϕ_0. 在一级近似或树图近似下，由(5-7-22)式有

$$I[\phi]+\int d^4x\, J(x)\,\phi_0(x)\simeq$$

$$I[\phi_0]+\mathrm{i}\int d^4x\, J(x)\phi_0(x) \tag{5-7-24}$$

此时

$$Z_0[J]=e^{iW_0[J]}=$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}I[\phi_0]+\mathrm{i}\int d^4xJ(x)\phi_0(x)\right\} \tag{5-7-25}$$

即树图近似下连通 Green 函数的生成泛函

$$W_0[J]=I[\phi_0]+\int d^4xJ(x)\phi_0(x) \tag{5-7-26}$$

将(5-7-26)式对 $J(x)$求泛函微商，利用(5-7-23)式得

$$\frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x)}=\int d^4y\left[\frac{\delta I}{\delta\phi_0(y)}\,\frac{\delta\phi_0(y)}{\delta J(x)}+\phi_0(y)\delta^{(4)}(x-y)+\right.$$

$$\left.J(y)\,\frac{\delta\phi_0(y)}{\delta J(x)}\right]=\phi_0(x) \tag{5-7-27}$$

因此，在一级近似下有外源时算符 $\hat{\phi}(x)$的期待值和所选取的展

开点 ϕ_0 相同．进行 Leyendre 变换，由(5-7-25)式得到的一级近似下正规顶角的生成泛函

$$\Gamma_0[\phi_0] = W_0[J] - \int d^4x J(x)\phi_0(x) = I[\phi_0] \quad (5\text{-}7\text{-}28)$$

这表明，在树图近似下正规顶角的生成泛函和作用量相等．这个结果对其他场也适用．因而，正规顶角的生成泛函在树图近似下也就是有效作用量．知道了正规顶角就可求出场的传播子以及 3 点、4 点顶角，并给出相应的 Feynman 规则等．

§5-8 仅含第一类约束的系统

下面讨论约束 Hamilton 系统的路径积分量子化．第四章讨论的算符形式正则量子化方法，虽然在处理某些问题时是成功的但是，这种方法仍存在某些不便．首先，在 Dirac 括号 $\{F,G\}_D$ 过渡到量子括号 $-i[F,G]$ 时，存在算符排列的次序问题；其次，当正则变量的 Dirac 括号并不简单地等于 δ-函数或Kronecker记号时，特别是当正则变量的 Dirac 括号的结果仍与正则变量有关时(如杨-Mills 场)，算符形式正则量子化的处理将是十分困难的．因此，算符形式的正则量子化方法并不是约束Hamilton系统量子化的最佳方案．路径积分提供了一个较理想的框架去处理这样的约束系统，用这个方法很容易讨论理论与规范选择无关，且较方便地导出了 Feynman 规则和 Ward 恒等式等．约束 Hamilton 系统的路径积分量子化首先是 Faddeev 给出的[7]，但他只研究了系统仅含第一类约束的情形，Senjanovic 将其推广到含第二类约束的系统[8]，Fradkin 等人讨论了更一般的情形[9~13]．

为了清楚起见，讨论有限自由度 C-数系统，推广到场论是直接的．假设系统所含的约束 $\Lambda_a \approx 0 (a=1,2,\cdots,m)$ 均为第一类约束，则系统的正则 Hamilton 量 H_c 也是第一类的，即

$$\{H_c, \Lambda_a\} = k_{ab}\Lambda_b \quad (a = 1,2,\cdots,m) \tag{5-8-1}$$

$$\{\Lambda_a, \Lambda_b\} = k_{ab}^c \Lambda_c \quad (a,b = 1,2,\cdots,m) \tag{5-8-2}$$

其中系数 k_{ab} 和 k_{ab}^c 可依赖于广义坐标 $q=(q^1,\cdots,q^n)$ 和正则动量 $p=(p_1,\cdots,p_n)$. 设正则变量 p 和 q 所张成的相空间记为 Γ^{2n}，此时扩展 Hamilton 量 $H_E=H_c+\lambda^a\Lambda_a(p,q)$ 所决定的系统随时间的演化等价于 $n-m$ 个自由度系统的寻常 Hamilton 量 H^* 在相空间 $\Gamma^{*2(n-m)}$ 中随时间的演化．这个 $n-m$ 个自由度系统的相空间 $\Gamma^{*2(n-m)}$ 可按下述方式构造．由于系统含 m 个第一类约束，需选取 m 个附加条件(规范条件)

$$\Omega^a(q,p) = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,m) \tag{5-8-3}$$

使它们在约束超曲面 $\Lambda_a=0$ 和 $\Omega^a=0$ 上，满足条件

$$\det|\{\Lambda_a, \Omega^b\}| \neq 0 \tag{5-8-4}$$

$$\{\Omega^a, \Omega^b\} = 0 \tag{5-8-5}$$

对于具有局域变换不变性的系统，附加条件(5-8-5)式的限制不是必要的[26]. 相空间 Γ^{2n} 中，由

$$\Lambda_a(q,p) = 0,\ \Omega^a(q,p) = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,m) \tag{5-8-6}$$

条件所决定的子空间就是 $\Gamma^{*2(n-m)}$.

$\Gamma^{*2(n-m)}$ 中的正则变量 q^* 和 p^* 可以通过 (q,p) 至 (q^*,p^*) 的正则变换得到．选取相空间 Γ^{2n} 中的广义坐标

$$q = (\Omega^a, q^*) = (\Omega^1,\cdots,\Omega^m, q^{*1},\cdots,q^{*n-m}) \tag{5-8-7}$$

对应的广义动量记为

$$p = (p^a, p^*) = (p_1,\cdots,p_m, p_1^*,\cdots,p_{n-m}^*) \tag{5-8-8}$$

用这些变量时，由(5-8-4)式有

$$\det|\{\Lambda_a, \Omega^b\}| = \det|\partial\Lambda_a/\partial p_b| \neq 0 \tag{5-8-9}$$

因此，从约束方程

$$\Lambda_a(q,p) = 0 \tag{5-8-10}$$

可解出 p_a，这样子空间 $\Gamma^{*2(n-m)}$ 可由

$$\Omega^a \equiv q^a = 0,\ p_a = p_a(q^*, p^*)$$

$$(a = 1,2,\cdots,m) \tag{5-8-11}$$

方程确定且 q^* 和 p^* 是正则变量．此系统的 Hamilton 量

$$H^*(q^*, p^*) = H_c(q, p)|_{\Lambda=0,\Omega=0} \tag{5-8-12}$$

系统的运动在相空间 Γ 和 Γ^* 中是等价的．在相空间 Γ 中系统的运动方程为

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i} \tag{5-8-13a}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i} \tag{5-8-13b}$$

$$\Lambda_a(q, p) = 0 \tag{5-8-13c}$$

因为 Λ_a 为第一类约束，这些方程的解中都含任意函数 $\lambda^a(t)$．引入附加的规范条件 $\Omega^a(q,p)=0$，用正则变量表示 $\lambda^a(t)$后，则可消除任意性，最后仅剩下变量 q^* 和 p^* 方程，即

$$\dot{q}^{*j} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*},\ \dot{p}_j^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q^{*j}} \tag{5-8-14}$$

正则变量(q^*, p^*)是相空间中 $2(n-m)$个真正的独立变量．附加的规范条件的选取等价于子空间 $\Gamma^{*2(n-m)}$ 中的正则变换，因而对物理结果没有影响．系统的量子化用独立变量 q^* 和 p^* 表达时，其量子跃迁幅(即转换矩阵元)

$$Z_0 = Z[0] = \lim_{j\to\infty} \int \prod_j \mathrm{d}q^{*j} \frac{\mathrm{d}p_j^*}{2\pi} \cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t[p_i^* \dot{q}^{*i} - H_c(q^*, p^*)]\right\} \tag{5-8-15}$$

然而，在实际问题中，很难分离出真正的独立变量 q^* 和 p^*．利用 δ-函数的性质[27]

$$\delta(\Lambda_a) = \int \frac{\mathrm{d}\lambda^a}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\lambda^a \Lambda_a) \tag{5-8-16}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\delta(x_i)=\left[\det\left|\frac{\partial(x)}{\partial(v)}\right|\right]^{-1}\prod_{i=1}^{n}\delta(v_i) \qquad (5\text{-}8\text{-}17)$$

以及正则变换下相空间体积不变，可将(5-8-15)式化为用非独立坐标表达的路径积分，即

$$Z_0=Z[0]=\lim_{j\to\infty}\int\prod_j \mathrm{d}q^j\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\prod_a^m\delta(\Lambda_a)\ \delta(\Omega^a)\ \det|\{\Lambda,\Omega\}|\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t[p_i\dot{q}^i-H_c(q,p)]\right\}=$$
$$\int\mathscr{D}q\ \mathscr{D}p\prod_a^m\delta(\Lambda_a)\ \delta(\Omega^a)\ \det|\{\Lambda,\Omega\}|\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t[p_i\dot{q}^i-H_c(q,p)]\right\} \qquad (5\text{-}8\text{-}18)$$

事实上，由于

$$\int\prod_{j,a}\mathrm{d}q^j\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\lambda^a}{2\pi}\prod_a\delta(\Omega^a)\det|\{\Lambda,\Omega\}|\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t[p_i\dot{q}^i-H_c(q,p)-\lambda^a\Lambda_a(q,p)]\right\}=$$
$$\int\prod_j\mathrm{d}q^j\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\prod_a\delta(\Lambda_a)\delta(\Omega^a)\det|\{\Lambda,\Omega\}|\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t[p_i\dot{q}^i-H_c(q,p)]\right\} \qquad (5\text{-}8\text{-}19)$$

用变量 q^a、p_a、q^*、p^* 表示，由(5-8-11)、(5-8-17)式，因子

$$\prod\delta(\Lambda_a)\delta(\Omega^a)\det|\{\Lambda_a,\Omega^a\}| \qquad (5\text{-}8\text{-}20)$$

可写为

$$\prod\delta(\Lambda_a)\delta(q^a)\det\left|\frac{\partial(\Lambda_a)}{\partial(p_b)}\right|=$$
$$\prod\delta(q^a)\delta[p_a-p_a(q^*,p^*)] \qquad (5\text{-}8\text{-}21)$$

将(5-8-21)式代入(5-8-19)式，并对 q^a 和 p_a 积分，于是(5-8-18)式就化为(5-8-15)式．在(5-8-18)式中对 q^i 补上外源 J_i 就得到相空

间 Green 函数的生成泛函，即

$$Z[J]=\int \mathscr{D}q\, \mathscr{D}p \prod_a^m \delta(\Lambda_a)\, \delta(\Omega^a)\, \det|\{\Lambda,\Omega\}|\, \cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t[p_i\dot{q}^i - H_c(q,p) + J_iq^i]\right\} \qquad (5\text{-}8\text{-}22)$$

最后，讨论一下所得的量子跃迁幅(5-8-18)式与规范 Ω^a 的选择无关的问题．设记 $\delta\Omega^a$ 是 Ω^a 的一个无穷小变更，即 $\Omega^a\to\Omega^a+\delta\Omega^a$. 第一类约束 Λ_a 的线性组合为规范变换的生成元 $G=\varepsilon^a\Lambda_a$. 由 G 产生的规范变换，其无穷小变换

$$\delta\Lambda^a = \{\Lambda^a, G\} = A^a_b\Lambda^b$$

对任意矩阵 $\boldsymbol{M}$，其行列式都为

$$\det \boldsymbol{M} = \exp[\mathrm{tr}(\ln \boldsymbol{M})] \qquad (5\text{-}8\text{-}23)$$

利用(5-8-17)式，取 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{A}=[A^a_b])$，于是得

$$\prod_a^m \delta(\Lambda^a+\delta\Lambda^a) = \prod_a^m \delta(\Lambda^a + A^a_b\Lambda^b) =$$

$$(\boldsymbol{1}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})^{-1}\prod_a^m \delta(\Lambda^a) \qquad (5\text{-}8\text{-}24)$$

这样

$$\prod_a^m \delta(\Lambda^a) \to \prod_a^m \delta(\Lambda^a+\delta\Lambda^a) = (\boldsymbol{1}+\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{-1}\prod_a^m \delta(\Lambda^a)$$

$$(5\text{-}8\text{-}25)$$

而

$$\det|\{\Lambda,\Omega\}| \to \det|\{\Omega+\delta\Omega, \Lambda+\delta\Lambda\}| =$$

$$\det|\{\Omega+\delta\Omega,\Lambda\}|\det\left|\frac{\partial(\Lambda^a+\delta\Lambda^a)}{\partial(\Lambda^b)}\right| =$$

$$\det|\{\Omega+\delta\Omega,\Lambda\}|(\boldsymbol{1}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}) \qquad (5\text{-}8\text{-}26)$$

将(5-8-25)、(5-8-26)式代入(5-8-18)式不难看出，该式仅产生一个 $\Omega^a\to\Omega^a+\delta\Omega^a$ 的改变．因此，在规范条件下做一个无穷小变更时，(5-8-18)式是不变的．

以上的讨论仅适用于无穷小变换，在规范条件下做有限变换的情况需另外研究，这与所谓 Gribov 不定性有关．

§5-9 同时含第一类约束和第二类约束的系统

含第二类约束系统的路径积分量子化是由 Senjanovic 给出的[8]．这里做简要叙述．

现讨论有限自由度 C-数系统，并设系统所含的第一类约束为

$$\Lambda_a(q,p)=0 \quad (a=1,2,\cdots,m) \tag{5-9-1}$$

第二类约束为

$$\theta_i(q,p)=0 \quad (i=1,2,\cdots,2k) \tag{5-9-2}$$

由 $q=[q^1,q^2,\cdots,q^n]$和 $p=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$张成的 $2n$ 维相空间记为 Γ，方程(5-9-1)、(5-9-2)式决定的 Γ 中的子空间记为 M．假设 Λ_a 和 θ_i 彼此独立，并且是不可约的，也就是说，M 中任一为 0 的函数 g 均可表示为约束的线性组合，即

$$g=A_a(q,p)\Lambda_a(q,p)+B_i(q,p)\theta_i(q,p) \tag{5-9-3}$$

Λ_a 为第一类约束，有

$$\{\Lambda_a,\Lambda_b\}|_M=0,\{\Lambda_a,\theta_i\}|_M=0 \tag{5-9-4}$$

θ_i 为第二类约束，于是

$$(\det|\{\theta_i,\theta_j\}|)|_M\neq 0 \tag{5-9-5}$$

按不可约假设

$$\{\Lambda_a,\Lambda_b\}=A^c_{ab}\Lambda_c+B^i_{ab}\theta_i \tag{5-9-6}$$

$$\{\Lambda_a,\theta_i\}=C^b_{ai}\Lambda_b+D^j_{ai}\theta_j \tag{5-9-7}$$

根据 Λ_a、Λ_b 和 θ_i 的 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式，由(5-9-5)～(5-9-7)式可知

$$B^i_{ab}|_M=0 \tag{5-9-8}$$

在 Hamilton 量中，与第一类约束相应的 Lagrange 乘子是任意的．可观测量 f 随时间的演化(运动方程)应该没有这种任意

性，此时要求

$$\{f,\Lambda_a\}|_M = 0 \tag{5-9-9}$$

或

$$\{f,\Lambda_a\} = A_a^b\Lambda_b + B_a^i\theta_i \tag{5-9-10}$$

(5-9-9)式可视为 M 上的 m 个微分方程组，(5-9-6)、(5-9-7)式作为可积条件．这样 f 由它在子流形上的初值条件唯一确定．子流形的维数为

$$(2n-m-2k)-m = 2(n-m-k)$$

取子流形为约束方程

$$\Omega_q(q,p) = 0 \quad (a=1,2,\cdots,m) \tag{5-9-11}$$

所决定的超曲面 $\Gamma^*(\Gamma^*\subset M)$，并称(5-9-11)式为规范条件．规范条件仅与第一类约束相联系，其规范条件应满足

$$\det|\{\Lambda_a,\Omega_b\}| \neq 0 \tag{5-9-12}$$

现在先列出该系统路径积分量子化的结果．设动力系统含 m 个第一类约束 Λ_a，含 $2k$ 个第二类约束 θ_i，相应于第一类约束的规范条件为 Ω_a. 那么，系统的量子跃迁幅

$$Z[0] = \int \mathscr{D}q^i\,\mathscr{D}p_i \prod_{a=1}^{m}\delta(\Lambda_a)\ \delta(\Omega_a)\prod_{i=1}^{2k}\delta(\theta_i)\ \det|\{\Lambda_a,\Omega_b\}|\cdot$$

$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t\ (p_i\dot{q}^i - H_c)\right\} \tag{5-9-13}$$

下面来证明此结果和用独立变量表达的量子跃迁幅是一致的．

将约束 $\Lambda_a\approx 0$ 和 $\theta_i\approx 0$ 所决定的约束超曲面 M 做无穷小膨胀，变为 $M_\varepsilon(M_\varepsilon\supset M,\varepsilon$ 为无穷小参数)，那么在区域 M_ε 中存在函数 λ_{ab}和 μ_{ab}，使得

$$\theta'_a = \lambda_{ai}\theta_i + \mu_{ab}\Lambda_b \tag{5-9-14}$$

在 M_ε 中适合[8]

$$\{\theta'_i,\theta'_j\} = (Ⓗ')_{ij} + O(\varepsilon^2) \tag{5-9-15}$$

$$\{\theta'_i,\Omega_a\} = O(\varepsilon^2) \tag{5-9-16}$$

式中

$$
\textcircled{H}' = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & \cdots \\
 & & & 1 & & \\
\hline
 & & -1 & & & \\
 & -1 & \cdots & & & \\
-1 & & & & &
\end{array}\right] \tag{5-9-17}
$$

并有关系式[8]

$$
\prod_{a} \delta(\Lambda_a) \prod_{i} \delta(\theta'_i) =
$$

$$
[\det |\{\theta_i, \theta_j\}|]^{1/2} \prod_{j} \delta(\theta_j) \prod_{a} \delta(\Lambda_a) \tag{5-9-18}
$$

将(5-9-18)式代入(5-9-13)式，得

$$
Z[0] = \int \mathscr{D} q^i \mathscr{D} p_i \prod_{a=1}^{m} \delta(\Lambda_a) \delta(\Omega_a) \prod_{i=1}^{2k} \delta(\theta'_i) \det |\{\Lambda_a, \Omega_b\}| \cdot
$$

$$
\exp \left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}t (p_i \dot{q}^i - H_c) \right\} \tag{5-9-19}
$$

考虑到(5-9-15)、(5-9-16)式在 M_ϵ 中可施行一正则变换，也就是说，新变量取为 $P_a = \Omega_a (a=1,2,\cdots,m)$，$Q^a$ 为其正则共轭坐标；$Q^{m+b} = \theta'_b$，$P_{m+b} = \theta'_{2k-b+1} (b=1,2,\cdots,k)$；其他剩余的 $2(n-m-k)$ 个独立变量可记为 $\overline{P}_i$ 和 $\overline{Q}^i$. 正则变换保持测度不变，这时 $\det |\{\Lambda_a, \Omega_b\}|$ 可用新变量表示为

$$
\det |\{\Lambda_a, \Omega_b\}| = \det |\{\Lambda_a, P_b\}| =
$$

$$
\det |\partial \Lambda_a / \partial Q^b| \neq 0 \tag{5-9-20}
$$

将(5-9-20)式代入(5-9-19)式，并对 P_a、P_{m+b} 和 Q^{m+b} 作出平凡的积分，得

$$
Z[0] = \int \mathscr{D} Q^a \mathscr{D} \overline{Q}^i \mathscr{D} \overline{P}_i \prod_{a} \delta(\Lambda_a) \det \left| \frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q^b} \right| \cdot
$$

$$
\exp \left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}t (\overline{P}_i \dot{\overline{Q}}^i - \overline{H}_c) \right\} \tag{5-9-21}
$$

式中

$$\overline{H}_c = H_c(\overline{P}_i, \overline{Q}^i, P_a = 0, Q^a, Q_{m+b} = 0, P_{m+a} = 0)$$

(5-9-22)

根据(5-9-20)式，从第一类约束方程

$$\Lambda_a(\overline{P}_i, \overline{Q}^i, Q^{a^*}, P_a = 0, Q^{m+b} = 0, P_{m+b} = 0) = 0$$

(5-9-23)

可解出 $Q^{a^*}(\overline{P}_i, \overline{Q}^i)$. 由于

$$\prod_a \delta(\Lambda_a)\det|\partial\Lambda_a/\partial Q^b| = \prod_a \delta(Q^a - Q^{a^*}(\overline{P}_i, \overline{Q}^i)) \quad (5\text{-}9\text{-}24)$$

将(5-9-24)式代入(5-9-21)式，然后对 Q^a 做积分，就得到系统的量子跃迁幅

$$Z[0] = \int \mathscr{D}\overline{Q}^i \mathscr{D}\overline{P}_i \exp\left\{i\int dt(\overline{P}_i \dot{\overline{Q}}^i - \overline{H}_c\right\} \quad (5\text{-}9\text{-}25)$$

式中

$$\overline{H}_c = H_c|_{Q^a = Q^{a^*}(\overline{P}_i, \overline{Q}^i)} \quad (5\text{-}9\text{-}26)$$

(5-9-25)式就是对独立变量做路径积分给出的量子跃迁幅，它与(5-9-13)式是完全等价的．

在(5-9-13)式中对 q^i 引入外源 J_i，于是对同时含第一类约束和第二类约束的系统 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}q^i \mathscr{D}p_i \prod_{a=1}^{m} \delta(\Lambda_a)\delta(\Omega_a) \prod_{i=1}^{2k} \delta(\theta_i)\det|\{\Lambda_a, \Omega_b\}| \cdot$$

$$[\det|\{\theta_i, \theta_j\}|]^{1/2} \exp\left\{i\int dt(p_i\dot{q}^i - H_c + J_i q^i)\right\}$$

(5-9-27)

§5-10 量子电动力学中 Green 函数的生成泛函

本节讨论量子电动力学(QED)的路径积分．旋量电动力学

的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}[\mathrm{i}\gamma_{\mu}(\partial^{\mu} - \mathrm{i}eA^{\mu}) - m]\psi \quad (5\text{-}10\text{-}1)$$

式中

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \quad (5\text{-}10\text{-}2)$$

电磁场 A_{μ} 和旋量场 ψ、$\overline{\psi}$的正则共轭动量分别为

$$\pi^{\mu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}} = -F^{0\mu} \quad (5\text{-}10\text{-}3)$$

$$\pi_{\psi} = \frac{\partial_{r}\mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = \mathrm{i}\,\overline{\psi}\gamma^{0} \quad (5\text{-}10\text{-}4)$$

$$\pi_{\overline{\psi}} = \frac{\partial_{r}\mathscr{L}}{\partial \dot{\overline{\psi}}} = 0 \quad (5\text{-}10\text{-}5)$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{c} = &\pi^{\mu}\dot{A}_{\mu} + \dot{\psi}\,\pi_{\psi} + \dot{\overline{\psi}}\,\pi_{\overline{\psi}} - \mathscr{L} = \\ &\frac{1}{2}\pi_{i}^{2} + A^{0}(\partial_{i}\pi_{i} + e\,\overline{\psi}\gamma^{0}\psi) + \frac{1}{4}F_{ik}^{2} - \\ &\mathrm{i}\,\overline{\psi}\gamma^{k}(\partial_{k} - \mathrm{i}eA_{k})\psi + m\,\overline{\psi}\psi\end{aligned} \quad (5\text{-}10\text{-}6)$$

系统所含的第一类约束为

$$\Lambda_{1} = \pi^{0} \approx 0 \quad (5\text{-}10\text{-}7)$$

$$\Lambda_{2} = \partial_{k}\pi_{k} - \mathrm{i}e(\overline{\psi}\pi_{\overline{\psi}} + \pi_{\psi}\psi) = \partial_{k}\pi_{k} + j^{0'} \approx 0 \quad (5\text{-}10\text{-}8)$$

第二类约束为

$$\theta_{1} = \pi_{\overline{\psi}} \approx 0 \quad (5\text{-}10\text{-}9)$$

$$\theta_{2} = \pi_{\psi} - \mathrm{i}\,\overline{\psi}\gamma^{0} \approx 0 \quad (5\text{-}10\text{-}10)$$

按约束 Hamilton 系统路径积分量子化规则，相应于每一个第一类约束，需选取一规范条件. 在 Coulomb 规范下，其规范条件取为

$$\Omega_{1} = A^{0} - \Delta^{-1}\partial_{i}\pi_{i} \approx 0 \quad (5\text{-}10\text{-}11)$$

$$\Omega_2 = \partial_i A_i \approx 0 \tag{5-10-12}$$

第二类约束 $\theta_i(i=1,2)$的 Poisson 括号构成的矩阵

$$[\{\theta_i,\theta_j\}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i}\gamma^0 \\ -\mathrm{i}\gamma^0 & 0 \end{bmatrix} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{5-10-13}$$

与场量无关，可从 Green 函数的生成泛函中略去；同样$\{\Lambda_k,\Omega_l\}$ $(k,l=1,2)$也与场量无关．在生成泛函中也可不计入这个因子．

对场 A_μ、ψ 和$\overline{\psi}$分别引入外源 J^μ、η 和$\overline{\eta}$，按§5-9 中的讨论，系统Green 函数的生成泛函

$$\begin{aligned} Z[J,\eta,\overline{\eta}] = &\int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\pi^\mu \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\pi_\psi \mathscr{D}\overline{\psi} \mathscr{D}\pi_{\overline{\psi}} \delta(A^0 - \Delta^{-1}\partial_i\pi_i) \cdot \\ &\delta(\pi_0)\delta(\partial_i A_i)\,\delta(\partial_i\pi_i + j^{0'})\delta(\pi_\psi - \mathrm{i}\,\overline{\psi}\gamma^0)\delta(\pi_{\overline{\psi}}) \cdot \\ &\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\pi^\mu \dot{A}_\mu + \dot{\psi}\,\pi_\psi + \dot{\overline{\psi}}\,\pi_{\overline{\psi}} - \mathscr{H}_\mathrm{c} + \right. \\ &\left. J^\mu A_\mu + \eta\psi + \overline{\eta}\,\overline{\psi}]\right\} \end{aligned} \tag{5-10-14}$$

式中 $\mathscr{H}_\mathrm{c}$ 由(5-10-6)式给出．将(5-10-14)式关于 A^0、π_0、π_ψ、$\pi_{\overline{\psi}}$积分，然后将 δ-函数 $\delta(\partial_i\pi_i + j^{0'})$写为

$$\int \mathscr{D}A^0 \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x A^0(\partial_i\pi_i + j^{0'})\right\} \tag{5-10-15}$$

这样生成泛函

$$\begin{aligned} Z[J,\eta,\overline{\eta}] = &\int \mathscr{D}A_\mu\,\mathscr{D}\pi^i\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\overline{\psi}\,\delta(\partial_i A_i)\,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\pi^i \dot{A}_i - \right. \\ &\frac{1}{2}\pi_i^2 - \pi_i\partial^i A^0 - \frac{1}{4}F_{ik}^2 + \mathrm{i}\,\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\psi + \\ &\left. J^i A_i + \eta\psi + \overline{\eta}\,\overline{\psi}]\right\} \end{aligned} \tag{5-10-16}$$

(5-10-16)式对动量的积分为 Gauss 型，作出对 π^i 的积分后，就可得到位形空间中 Green 函数的生成泛函，即

$$Z[J,\eta,\bar{\eta}]=\int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi}\,\delta(\partial_i A_i)\exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\mathscr{L}+$$

$$J^\mu A_\mu+\eta\psi+\bar{\eta}\bar{\psi})\Big\} \qquad (5\text{-}10\text{-}17)$$

其中 $\mathscr{L}$ 为原始 Lagrange 量(5-10-1)式．在(5-10-17)式中，为了对称起见对 A_0 引入了外源 J^0. (5-10-17)式与用 Faddeev-Popov 理论对规范场量子化所给出的结果相同．按量子场论中传统的方法，由(5-10-17)式不难导出系统的 Green 函数以及 Ward-Takahashi 恒等式等．

§5-11　杨-Mills 场的路径积分量子化

无论是含第一类约束的系统还是含第二类约束的系统，上面讨论的约束系统的路径积分量子化形式都是在相空间中给出的．与正规 Lagrange 系统相似，当对 π 的积分可积出时，约束系统的路径积分也可在位形空间中讨论．§5-10 中以 QED 为例作了说明，本节讨论非 Abel 规范场，并以纯杨-Mills 场为例给出路径积分量子化的具体形式．

杨-Mills 场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^\alpha_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_\alpha \qquad (5\text{-}11\text{-}1)$$

式中

$$F^\alpha_{\mu\nu}=\partial_\mu A^\alpha_\nu-\partial_\nu A^\alpha_\mu+gf^\alpha_{\beta\gamma}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu \qquad (5\text{-}11\text{-}2)$$

与杨-Mills 势 A^α_μ 相应的正则动量

$$\pi^\mu_\alpha=-F^{0\mu}_\alpha \qquad (5\text{-}11\text{-}3)$$

正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c=\frac{1}{2}\pi^\alpha_i\pi^\alpha_i+\frac{1}{4}F^\alpha_{ij}F^\alpha_{ij}-A^\alpha_0(\partial_i\pi^\alpha_i-gf^\alpha_{\beta\gamma}A^\beta_i\pi^\gamma_i)$$

$$(5\text{-}11\text{-}4)$$

初级约束和次级约束分别为

$$\Lambda_1^\alpha = \pi_\alpha^0 \approx 0 \tag{5-11-5}$$

$$\Lambda_2^\alpha = \partial_i \pi_i^\alpha - g f_{\beta\gamma}^\alpha A_i^\beta \pi_\gamma^i \approx 0 \tag{5-11-6}$$

Λ_1^α 和 Λ_2^α 均为第一类约束．规范约束(条件)取为

$$\Omega_1^\alpha = \partial^i \pi_i^\alpha + \partial^i \partial_i A_0^\alpha - g f_{\beta\gamma}^\alpha A_i^\beta \partial^i A_0^\gamma \approx 0 \tag{5-11-7}$$

$$\Omega_2^\alpha = \partial^i A_i^\alpha \approx 0 \tag{5-11-8}$$

Ω_1^α 由 Ω_2^α 的时间稳定性而来，其中 $\Omega_1^\alpha \approx 0$ 又可写为

$$\Omega_1^\alpha = A_0^\alpha - G^\alpha \approx 0 \tag{5-11-9}$$

式中

$$G^\alpha = - \int d^3 y G^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{A}) \partial_i \pi_\beta^i \tag{5-11-10}$$

而 $G^{\alpha\beta}$ 为算符 $M_{\alpha\beta}$ 的 Green 函数．

$$M_{\alpha\beta}(x) G^{\beta\gamma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{A}) = \delta_\alpha^\gamma \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{5-11-11}$$

$$M_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} \partial_k \partial^k - g f_{\beta\gamma}^\alpha A_k^\beta \partial^k \tag{5-11-12}$$

下面先计算行列式 $\det|\{\Omega, \Lambda\}|$．显然，

$$\{\Omega_1^\alpha(x), \Lambda_1^\beta(y)\} = \delta^{\alpha\beta} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{5-11-13a}$$

$$\{\Omega_1^\alpha(x), \Lambda_2^\beta(y)\} = - \{G^\alpha(x), \Lambda_2^\beta(y)\} \tag{5-11-13b}$$

$$\{\Omega_2^\alpha(x), \Lambda_1^\beta(y)\} = 0 \tag{5-11-13c}$$

$$\{\Omega_2^\alpha(x), \Lambda_2^\beta(y)\} = - M^{\alpha\beta} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{5-11-13d}$$

因此，

$$\det|\{\Omega_i^\alpha, \Lambda_j^\beta\}| = \det|M^{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})| = \det \boldsymbol{M}_c \tag{5-11-14}$$

其中已省去了无关紧要的常数，因为在路径积分中仅仅对应于归一化因子．由(5-8-18)式有

$$Z[0] = \int \prod_{\mu,\alpha,x} dA_\mu^\alpha d\pi_\alpha^\mu \delta(\Lambda_1^\alpha) \delta(\Lambda_2^\alpha) \delta(\Omega_1^\alpha) \delta(\Omega_2^\alpha) \cdot$$

$$\det|\{\Lambda, \Omega\}| \exp\left\{ i \int d^4 x (\pi_\alpha^\mu \dot{A}_\mu^\alpha - \mathscr{H}_c) \right\} =$$

$$\int \prod_{\mu,\alpha,x} dA_\mu^\alpha d\pi_\alpha^\mu \det \boldsymbol{M}_c \delta(\pi_\alpha^0) \delta(\Lambda_2^\alpha) \delta(A_0^\alpha - G^\alpha) \cdot$$

$$\delta(\partial_i A_i^a)\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\pi_a^\mu \dot{A}_\mu^a - \mathscr{H}_c)\right\} \tag{5-11-15}$$

作出 A_0^a 和 π_a^0 的积分，利用关系式

$$\prod_a \delta(\Lambda_2^a) = \int \mathscr{D}\lambda_a \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \lambda_a \Lambda_2^a\right\} \tag{5-11-16}$$

可将(5-11-15)式写为

$$Z[0] = \int \prod_x \det \boldsymbol{M}_c \prod_{i,a} \delta(\partial_i A_i^a) \mathrm{d}A_i^a \mathrm{d}\pi_i^a \mathrm{d}\lambda_a \cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\pi_a^i \dot{A}_i^a - \mathscr{H}'_c)\right\} \tag{5-11-17}$$

式中

$$\mathscr{H}'_c = \frac{1}{2}\pi_i^a \pi_i^a + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a - (G_a + \lambda_a)\Lambda_2^a \tag{5-11-18}$$

引入新的积分变量，并记为 $A_0^a = G^a + \lambda^a$. 由于积分的平移不变性，(5-11-17)式又可写为

$$Z[0] = \int \prod_x \det \boldsymbol{M}_c \prod_{i,a} \delta(\partial_i A_i^a) \mathrm{d}\pi_i^a \prod_\mu \mathrm{d}A_\mu \cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\pi_a^i \dot{A}_i^a - \mathscr{H}_c)\right\} \tag{5-11-19}$$

其中 $\mathscr{H}_c$ 由(5-11-4)式给出，它包含 Λ_2^a 的项，经分部积分后，有

$$\int \mathrm{d}^4 x A_0^a \Lambda_2^a = -\int \mathrm{d}^4 x \pi_i^a (\partial_i A_0^a + g f_{\beta\gamma}^a A_0^\beta A_i^\gamma) \tag{5-11-20}$$

这时(5-11-19)式被积函数的指数中含动量 π_i^a 的平方项，即

$$\pi_i^a \dot{A}_i^a - \mathscr{H}_c = -\frac{1}{2}\pi_i^a \pi_i^a + \pi_i^a F_{0i}^a - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a \tag{5-11-21}$$

式中

$$F_{0i}^a = \dot{A}_i^a - \partial_i A_0^a - g f_{\beta\gamma}^a A_0^\beta A_i^\gamma \tag{5-11-22}$$

将(5-11-21)式代入(5-11-19)式，对 π_i^a 积分后，得

$$Z[0] = \int \prod_x \det \boldsymbol{M}_c \prod_a \delta(\partial_i A_i^a) \prod_\mu \mathrm{d}A_\mu^a \cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}F_{0i}^{\alpha}F_{0i}^{\alpha}+\frac{1}{4}F_{ij}^{\alpha}F_{ij}^{\alpha}\right]\right\}=$$

$$\int\prod_{x,\alpha,\mu}\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}\delta(\partial_i A_i^{\alpha})\mathrm{d}A_{\mu}^{\alpha}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}\right\} \qquad (5\text{-}11\text{-}23)$$

式中 $\mathscr{L}$ 由(5-11-1)式给出．

Faddeev-Popov 用直观的办法导出了(5-11-23)式，其中因子

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}\prod_{\alpha}\delta(\partial_i A_i^{\alpha}) \qquad (5\text{-}11\text{-}24)$$

可以用表达式

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}\prod_{\alpha}\delta(\partial^{\mu} A_{\mu}^{\alpha}) \qquad (5\text{-}11\text{-}25)$$

代替．式中 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}=[M_{\mathrm{L}}^{\alpha\beta}]$，其中

$$M_{\mathrm{L}}^{\alpha\beta}=(\delta_{\alpha\beta}\partial^{\mu}\partial_{\mu}+gf_{\beta\gamma}^{\alpha}A_{\mu}^{\gamma}\partial^{\mu})\delta^4(x-y) \qquad (5\text{-}11\text{-}26)$$

根据 Grassmann 变量$\overline{C}_a(x)$和 $C_b(y)$的积分性质，有

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}=\int\mathscr{D}\,\overline{C}_a(x)\mathscr{D}C_b(y)\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\overline{C}_a(x)M_{\mathrm{L}}^{ab}C_b(y)\right\} \qquad (5\text{-}11\text{-}27)$$

式中$\overline{C}_a(x)$和 $C_b(y)$($a,b=1,2,\cdots,n$)为 Faddeev-Popov 鬼场，它们既是规范群表示空间中的 n 维矢量，又是 Minkowski 空间中的标量．它们是反对易的，不像普通标量粒子那样服从 Bose 统计，而像旋量粒子那样服从 Fermi 统计．由于自旋和统计的反常关系，因此称$\overline{C}_a$ 和 C_b 为鬼(粒子)场或虚拟场．

将规范条件改为

$$\partial^{\mu}A_{\mu}^{a}=p^{a}(x) \qquad (5\text{-}11\text{-}28)$$

式中 $p^a(x)$是与规范无关的函数(由于 $Z[0]$的规范无关性)．用因子

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\alpha_0}\int \mathrm{d}^4x[p^a(x)]^2\right\} \qquad (5\text{-}11\text{-}29)$$

乘 Z[0]的表达式，然后对 $p^a(x)$做路径积分，得

$$Z[0] = \int \mathscr{D} A_\mu^a \mathscr{D} \overline{C}_a \mathscr{D} C_a \exp\left\{ i \int d^4 x\ \mathscr{L}_{eff} \right\} \quad (5\text{-}11\text{-}30)$$

式中

$$\mathscr{L}_{eff} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{fix} + \mathscr{L}_{gh} \quad (5\text{-}11\text{-}31)$$

$\mathscr{L}$ 为原始 Lagrange 量，而

$$\mathscr{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha_0}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \quad (5\text{-}11\text{-}32)$$

$$\mathscr{L}_{gh} = -\partial_\mu \overline{C}_a D_b^{\mu a} C^b \quad (D_b^{\mu a} = \delta_b^a \partial^\mu + f_{bc}^a \partial_c^\mu) \quad (5\text{-}11\text{-}33)$$

这里是从约束 Hamilton 系统的路径积分量子化严格导出的结果，而 Faddeev 和 Popov 是用直观的方法得到的．

§5-12 非 Abel Chern-Simons 理论与 Fermi 场耦合

无论是 Abel Chern-Simons 项或者非 Abel Chern-Simons 项与物质场耦合，在(1+2)维时空中描述任意子(anyon)的性质，引起了人们广泛关注[28]. 任意子的分数自旋和分数统计性质与分数量子 Hall 效应以及高温超导有关．

在(1+2)维时空中 Fermi 场与非 Abel Chern-Simons 理论的 Lagrange 量[29]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a + \frac{1}{3}f_{bc}^a A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c\Big) + i\,\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\,\overline{\psi}\psi \quad (5\text{-}12\text{-}1)$$

式中 $\psi=\psi^a T^a$，其中 T^a 为规范群 $SU(n)$的生成元，

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (5\text{-}12\text{-}2)$$

式中：f^a_{bc}为规范群的结构常数；a、b、c 为与规范群生成元相应的群表示指标；D_μ 代表协变微商；常数 κ 为规范场的拓朴质量．在 Abel Chern-Simons 规范理论中，规范变换下 Lagrange 量改变一个全散度项；在非 Abel Chern-Simons 理论中，规范不变性要求 $\kappa=n/4\pi$（n 为整数）[30]．Minkowski 空间的度规 $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1\ -1\ -1)$；Dirac γ-矩阵为 $\gamma^0=\sigma^3$，$\gamma^1=\mathrm{i}\sigma^1$，$\gamma^2=\mathrm{i}\sigma^2$（$\sigma$ 为 Pauli 矩阵）．这里约定 $\varepsilon^{012}=\varepsilon^{12}=1$．

相应于场 A^a_μ、ψ^a 和$\bar{\psi}^a$ 的正则共轭动量分别为

$$\pi^{a\mu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^a_\mu}=F^{a\mu0}+\kappa\varepsilon^{0\mu\nu}A^a_\nu \tag{5-12-3}$$

$$\pi^a=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}_a}=\mathrm{i}\,\bar{\psi}^a\gamma^0 \tag{5-12-4}$$

$$\bar{\pi}^a=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_a}=0 \tag{5-12-5}$$

初级约束分别为

$$\Lambda^a_1=\pi^{a0}\approx 0 \tag{5-12-6}$$

$$\bar{\theta}^a=\pi^a-\mathrm{i}\,\bar{\psi}^a\gamma^0\approx 0 \tag{5-12-7}$$

$$\theta^a=\bar{\pi}^a\approx 0 \tag{5-12-8}$$

总 Hamilton 量

$$H_\mathrm{T}=\int\mathrm{d}^2x\mathscr{H}_\mathrm{T} \tag{5-12-9}$$

式中

$$\mathscr{H}_\mathrm{T}=\mathscr{H}_\mathrm{c}+\lambda_a\Lambda^a_1+\bar{\mu}_a\theta^a+\bar{\theta}^a\mu_a \tag{5-12-10}$$

$$\mathscr{H}_\mathrm{c}=\pi^{a\mu}\dot{A}^a_\mu+\dot{\bar{\psi}}^a\pi_a+\dot{\psi}^a\bar{\pi}_a-\mathscr{L} \tag{5-12-11}$$

其中：λ_a 为 Bose Lagrange 乘子；$\bar{\mu}_a$ 和 μ_a 为 Fermi Lagrange 乘子．

由初级约束 Λ^a_1 的自洽性条件 $\dot{\Lambda}^a_1=\{\Lambda^a_1,H_\mathrm{T}\}\approx 0$，可给出次级

约束

$$\chi^a = -\partial_i \pi^{ai} + f^a_{bc} A^b_i \pi^i_c - \kappa \varepsilon^{ij} \partial_i A^a_j + \mathrm{i} f^a_{bc} \overline{\psi}^b \gamma^0 \psi^c \approx 0 \tag{5-12-12}$$

由初级约束$\overline{\theta}^a$和θ^a的自洽性条件，可给出确定 Lagrange 乘子的方程，即

$$\mu^a = \gamma_0 \gamma^i \mathrm{D}_i \psi^a + \mathrm{i} m \gamma_0 \psi^a + f^a_{bc} A^b_0 \psi^c \tag{5-12-13}$$

$$\overline{\mu}^a = \mathrm{D}_i \overline{\psi}^a \gamma^i \gamma_0 - \mathrm{i} m \overline{\psi}^a \gamma_0 + f^a_{bc} A^b_0 \overline{\psi}^c \tag{5-12-14}$$

次级约束的自洽性条件不导致新的约束．将约束做线性组合

$$\Lambda^a_2 = f^a_{bc}(\overline{\psi}^b \overline{\pi}^c + \pi^b \psi^c) + \partial_i \pi^{ai} - f^a_{bc} A^b_i \pi^i_c + \kappa \varepsilon^{ij} \partial_i A^a_j \tag{5-12-15}$$

不难验证，Λ^a_1 和 Λ^a_2 为第一类约束，$\overline{\theta}^a$ 和 θ^a 为第二类约束．

按 Faddeev-Senjanovic 对约束系统的量子化方法，对每一个第一类约束，需选取一个规范条件．当规范场与物质场耦合时，采用辐射规范（$A_0=0, \partial_i A^i=0$）是不合适的．考虑 Coulomb 规范

$$\Omega^a_2 = \partial^i A^a_i \approx 0 \tag{5-12-16}$$

由 Ω^a_2 的自洽性条件 $\dot{\Omega}^a_2 \approx 0$，可选取另一规范条件

$$\Omega^a_1 = \partial^i \pi^a_i + \nabla^2 A^a_0 - f^a_{bc} A^b_i \partial^i A^c_0 \approx 0 \tag{5-12-17}$$

不难验证，$\det|\{\overline{\theta}^a, \theta^b\}|$ 与场量无关，可以从 Green 函数的生成泛函中略去；而 $\det|\{\Lambda^a, \Omega^b\}| = \det M^{ab}$，其中

$$M^{ac} = (\delta^{ac} \nabla^2 - f^a_{bc} A^b_i \partial^i) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{5-12-18}$$

Green 函数的相空间生成泛函

$$\begin{aligned} Z[J, \overline{\eta}, \eta] = \int & \mathscr{D} A^a_\mu \mathscr{D} \pi^\mu_a \mathscr{D} \psi \mathscr{D} \pi \mathscr{D} \overline{\psi} \mathscr{D} \overline{\pi} \prod_{a,b,i,j} \delta(\Lambda^a)\, \delta(\Omega^b) \cdot \\ & \delta(\theta_i)\, \delta(\overline{\theta}_j) \det|\{\Lambda^a, \Omega^b\}| (\det|\{\overline{\theta}^i, \theta^j\}|)^{1/2} \cdot \\ & \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3 x (\pi^\mu_a \dot{A}^a_\mu + \dot{\psi} \overline{\pi} + \dot{\overline{\psi}} \pi - \mathscr{H}_c + \right. \\ & \left. J^\mu_a A^a_\mu + \overline{\psi} \eta + \overline{\eta} \psi) \right\} \end{aligned} \tag{5-12-19}$$

在 $Z[0]$表达式中，对 π_a^μ、$\bar{\pi}^a$ 和 π^a 积分，得

$$Z[0]=\int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi}\, \delta(\partial^i A_i^a)\det|M^{ac}| \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\right\} \tag{5-12-20}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=&-\frac{1}{4}F_{ij}^a F^{aij}-\frac{1}{2}F_{0i}^a F^{a0i}+\kappa\varepsilon^{ij}\partial_0 A_i^a A_j^a-\\&\kappa\varepsilon^{ij}\partial_i A_0^a A_j^a+\kappa\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a A_0^a+\kappa f_{bc}^a\varepsilon^{ij}A_0^a A_i^b A_j^c+\\&\mathrm{i}\,\bar{\psi}^a\gamma^\mu\partial_\mu\psi_a-\mathrm{i}f_{bc}^a\,\bar{\psi}^b\gamma_\mu\psi^c A^{a\mu}-m\,\bar{\psi}^a\psi_a\end{aligned} \tag{5-12-21}$$

利用 δ-函数和 Grassmann 变量积分的性质，像 § 5-11 讨论中那样，也可将(5-12-20)式中的因子 $\delta(\partial^i A_i^a)$和 $\det M^{ab}$翻到该式中的指数上去．

§ 5-13　BFV 路径积分量子化

前面讨论约束 Hamilton 系统的量子化中(Dirac 方法或 FS 方法)，规范条件中仅含正则变量(正则规范)．通常不能满足相对论协变性要求，例如 Lorentz 规范就不是正则规范，因为它不仅含正则变量，而且还含 Lagrange 乘子 A^0 的时间微商．Batalin、Fradkin 和 Vilkovsky 基于 BRST(或 BRS)对称，给出了一种相对论协变性量子化方案[9~13]，简称为 BFV 量子化(包括算符形式和路径积分形式量子化)[13,23]．这里扼要说明 BFV 路径积分量子化方法．

设描述动力学系统的正则变量记为 $Z_A(A=1,2,\cdots,n)$，且 $Z_A=(q^A,p_A)$，Z_A 中可含 Grassmann 变量，并设系统仅含第一类约束．其约束函数为 $\phi_\alpha(Z_A)(\alpha=1,2,\cdots,m)$，且系统的正则 Hamilton 量 H_c 也是第一类约束，则有

$$\{\phi_\alpha,\phi_\beta\}=C_{\alpha\beta}^\gamma\phi_\gamma \tag{5-13-1}$$

$$\{H_c, \phi_\alpha\} = V_\alpha^\beta \phi_\beta \tag{5-13-2}$$

函数 F 和 G 的 Poisson 括号为

$$\{F, G\} = \frac{\partial_r F}{\partial Z_A} C_{AB} \frac{\partial_l G}{\partial Z_B} \tag{5-13-3}$$

式中：∂_r 和 ∂_l 分别代表右微商和左微商；$C_{AB} = \{Z_A, Z_B\}$. 将(5-13-3)式用 q^A 和 p_A 写出，则有

$$\{F, G\} = \frac{\partial_r F}{\partial q^A} \frac{\partial_l G}{\partial p_A} - (-1)^{n_F n_G} \frac{\partial_r G}{\partial q^A} \frac{\partial_l F}{\partial p_A} \tag{5-13-4}$$

式中 n_F 和 n_G 分别为 F 和 G 的 Grassmann 宇称. Poisson 括号有下述性质：

$$\{A, B\} = -(-1)^{n_A n_B}\{B, A\} \tag{5-13-5}$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} \tag{5-13-6}$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + (-1)^{n_A n_B} B\{A, C\} \tag{5-13-7}$$

$$\{A, \{B, C\}\} + (-1)^{n_A(n_B+n_C)}\{\{B, C\}, A\} + (-1)^{n_C(n_A+n_B)}\{\{C, A\}, B\} = 0 \tag{5-13-8}$$

与扩展 Hamilton 量 $H_E = H_c + \lambda^\alpha \phi_\alpha$ 相应的正则作用量

$$I_E[z, \lambda] = \int \left\{ -\frac{1}{2}(C^{-1})^{AB} \dot{z}_A z_B - H_c - \lambda^\alpha \phi_\alpha \right\} dt \tag{5-13-9}$$

在

$$\left.\begin{aligned} \delta z &= \{z, \varepsilon^\alpha \phi_\alpha\} = (-1)^{n_\alpha n_z} \varepsilon^\alpha \{z, \phi_\alpha\} \\ \delta \lambda^\alpha &= \dot{\varepsilon}^\alpha + \lambda^\gamma \varepsilon^\beta C_{\beta\gamma}^\alpha - \varepsilon^\beta V_\beta^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5-13-10}$$

变换下不变. 将 Lagrange 乘子 λ^α 视为动力学变量，相应的正则动量记为 π_α，这样相空间变量为 $z_\Delta(z_A, \lambda^\alpha, \pi_\alpha)$. 与 Lagrange 乘子 λ^α 相应的动量 π_α 适合

$$\pi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, m) \tag{5-13-11}$$

该式表明，在变量 z_Δ 的相空间增添了 m 个约束. 将所有 $2m$ 个约束都记为 $G_a = (\phi_\alpha, \pi_\alpha)(a = 1, 2, \cdots, 2m)$，因为 ϕ_α 与 λ^β 无关，故它们满足下列关系：

$$\{G_a, G_b\} = C^c_{ab} G_c \tag{5-13-12}$$

$$\{H_c, G_a\} = V^b_a G_b \tag{5-13-13}$$

并称 $\overset{(0)}{U}_a = G_a$ 为零阶结构函数．做零阶结构函数的 Poisson 括号，由于约束是第一类的，则有

$$\{\overset{(0)}{U}_a, \overset{(0)}{U}_b\} = -2\overset{(1)}{U^c_{ab}}\overset{(0)}{U}_c \tag{5-13-14}$$

可得一阶结构函数 $\overset{(1)}{U^c_{ab}}$．当 $\overset{(1)}{U^c_{ab}}$为常数时(如杨-Mills 理论)，其规范群具有闭合代数；当 $\overset{(1)}{U^c_{ab}}$依赖于正则变量时，其规范代数为开代数．由 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式(5-13-8)式可得二阶结构函数 $\overset{(2)}{U^{mn}_{abc}}$．重复上述步骤可得高阶结构函数．因为约束的线性组合，给出另一级约束，即

$$\overset{(0)}{U'}_a(q,p) = \omega^b_a \overset{(0)}{U}_b(q,p), \ \det|\omega^b_a| \neq 0 \tag{5-13-15}$$

选取新函数 $\overset{(0)}{U'}_a(q,p)$为零阶结构函数，相当于差一规范变换．这样零阶结构函数具有不确定性，同样一阶和高阶结构函数都具有不确定性．

在相空间 $z_\Delta(z_A, \lambda^a, \pi_a)$中，对每一个约束 G_a 引入反对易鬼场 η^a 和它的正则共轭动量 $\mathscr{P}_a$，它们遵从如下 Poisson 括号：

$$\{\mathscr{P}_a, \eta^b\} = -\delta^b_a = (-1)^{n_a}\{\eta^b, \mathscr{P}_a\} \tag{5-13-16}$$

$$\{\mathscr{P}_a, z_\Delta\} = \{\eta^a, z_\Delta\} = 0 \tag{5-13-17}$$

且

$$(\eta^a)^* = \eta^a, \ (\mathscr{P}_a)^* = -\mathscr{P}_a \tag{5-13-18}$$

坐标为$(z_\Delta, \eta^a, \mathscr{P}_a)$的超相空间(满足上述 Poisson 括号)称为扩展相空间．

在扩展相空间中，定义变量的鬼数(gh)

$$\mathrm{gh}(z_\Delta) = 0, \ \mathrm{gh}(\eta^a) = 1, \mathrm{gh}(\mathscr{P}_a) = -1$$

变量积的鬼数等于它们鬼数之和，如

$$\mathrm{gh}(\eta^a\eta^b) = 2, \ \mathrm{gh}(\eta^a\mathscr{P}_a) = 0$$

现考虑母函数

$$\Omega = \sum_{n\geqslant 0} \eta^{a_{n+1}} \cdots \eta^{a_1} \overset{(n)}{U}{}^{b_1 \cdots b_n}_{a_1 \cdots a_{n+1}} \mathscr{P}_{b_n} \cdots \mathscr{P}_{b_1} \tag{5-13-19}$$

它具有

$$\left.\frac{\partial \Omega}{\partial \eta^a}\right|_{\eta=\mathscr{P}=0} = \overset{(0)}{U}_a \tag{5-13-20}$$

$$\left.\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \eta^b \partial \eta^a \partial \mathscr{P}_c}\right|_{\eta=\mathscr{P}=0} = 2\overset{(1)}{U}{}^c_{ab} \tag{5-13-21}$$

……

性质．可见，对 Ω 的上述各级微商，恰好给出各级结构函数；Ω 对 η^a 的一级微商，恰好给出规范变换生成元．于是，Ω 称为 BRST 生成元，它是结构函数的母函数．根据约束 Hamilton 系统的结构函数，可构造 BRST 生成元 Ω.

BRST 生成元具有下列性质：

(1)Ω 是实的：

$$\Omega^* = \Omega \tag{5-13-22}$$

(2)Ω 的鬼数为 1：

$$\mathrm{gh}(\Omega) = 1 \tag{5-13-23}$$

(3)Ω 是反对易的：

$$n_\Omega(\Omega) = 1 \tag{5-13-24}$$

(4)Ω 是幂零的：

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \tag{5-13-25}$$

由 Ω 产生的变换称为 BRST 对称变换．如果 $n > N$ 时，$\overset{(n)}{U} = 0$，则称 Ω 及结构函数相应系统的秩为 N. 由于结构函数的不确定性，相应的不同 BRST 生成元由扩展相空间中的正则变换所联系．对 Abel 理论，BRST 生成元为

$$\Omega = \eta^a G_a \quad (\{G_a, G_b\} = 0) \tag{5-13-26}$$

它的秩为 0；对杨-Mills 型规范理论，

$$\Omega = \eta^a G_a - \frac{1}{2}\eta^b \eta^c C^a_{cb} \mathscr{P}_a \tag{5-13-27}$$

它的秩为 1. 一般开代数系统是高秩的，如超引力[30]和相对论性膜[31].

经典可观察量为规范不变函数 $A_0(q,p)$，它与约束的 Poisson 括号弱等于 0，即

$$\{A_0, G_a\} = w_a^b G_b \approx 0 \tag{5-13-28}$$

该式表明，A_0 在规范变换下不改变．其可观察量 $A_0(q,p)$ 的扩展量 A 是扩展相空间中的函数，并具有下列性质：

$$(1)\quad A|_{\eta=\mathscr{P}=0} = A_0(q,p) \tag{5-13-29}$$

$$(2)\quad \mathrm{gh}(A) = 0 \tag{5-13-30}$$

将 A 展开，有

$$A = \sum_{n\geqslant 0} \eta^{b_n} \cdots \eta^{b_1} \overset{(n)}{A}{}^{a_1\cdots a_n}_{b_1\cdots b_n} \mathscr{P}_{a_n} \cdots \mathscr{P}_{a_1} \tag{5-13-31}$$

其中 $\overset{(0)}{A} = A_0$. 显然，如果 $\{A, \Omega\} = 0$，那么 $\{\overset{(0)}{A}, G_a\} \approx 0$. 表明 BRST 不变函数是规范不变量的扩展量；反过来，任一规范不变函数 $A_0(q,p)$，总具有一个 BRST 不变的扩展量 A，$\{A,\Omega\}=0$. 此扩展量不是唯一的，两个扩展量 A 和 A' 之差为

$$A' = A + \{K, \Omega\} \tag{5-13-32}$$

式中 K 的鬼数为 -1. 由 Jacobi 恒等式(5-13-8)和 Ω 的幂零性，可知 $\{K,\Omega\}$ 是 BRST 不变的，即 $\{\{K,\Omega\},\Omega\}=0$. 扩展相空间中的任何函数 A，如果具有(5-13-29)、(5-13-30)式和(5-13-32)式性质，则称 A 为 BRST 可观察量.

Hamilton 量 H_0 是物理系统的可观察量，在扩展相空间中存在相应的 BRST 不变的扩展量 H，

$$\{H, \Omega\} = 0 \tag{5-13-33}$$

此扩展量准确到

$$H \to H + \{K, \Omega\} \tag{5-13-34}$$

路径积分中选取不同规范，相当于变换(5-13-34)式．

物理态由 BRST 荷来挑选，即物理态$|\psi\rangle$被 BRST 荷所湮灭，

$$\Omega|\psi\rangle = 0 \tag{5-13-35}$$

态$|\psi\rangle$和态$|\psi\rangle+\Omega|\chi\rangle$是等价的．

设(q^A, p_A)为原有相空间 z_A 中的变量；系统所含的第一类约束为 ϕ_α；λ^α 为与 ϕ_α 相联系的 Lagrange 乘子；π_α 为 λ^α 的正则共轭动量．在相空间$(z_A, \lambda^\alpha, \pi_\alpha)$中，相应于每一个约束 $G_a(\phi_\alpha, \pi_\alpha)$引入鬼场 η^a 及其正则共轭动量 $\mathscr{P}_a$. 在扩展相空间中，路径积分（场量满足一定的边界条件）

$$Z[0]_\psi = \int \mathscr{D}q^A\, \mathscr{D}p_A\, \mathscr{D}\lambda^\alpha\, \mathscr{D}\pi_\alpha\, \mathscr{D}\eta^a\, \mathscr{D}\mathscr{P}_a\, \exp iI_{\text{eff}} \tag{5-13-36}$$

与 ψ 无关．ψ 是 z_A、λ^α、η^a 和它们正则共轭动量的任意函数，而

$$I_{\text{eff}} = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^A p_A + \dot{\lambda}^\alpha \pi_\alpha + \dot{\eta}^a \mathscr{P}_a - H_{\text{eff}})\text{d}t \tag{5-13-37}$$

$$H_{\text{eff}} = H - \{\psi, \Omega\} \tag{5-13-38}$$

式中：I_{eff}称为有效作用量；H_{eff}称为有效 Hamilton 量；ψ 称为规范固定 Fermi 子．此结果在文献[9,10,13,23]中有详细证明．这里扼要叙述证明的主要步骤．

将扩展相空间中变量记为 $Z_\Sigma(t)$. 在路径积分(5-13-36)式中考虑下列积分变量的变换：

$$Z'_\Sigma(t) = Z_\Sigma(t) + \{Z_\Sigma, \Omega\}\chi \tag{5-13-39}$$

式中

$$\chi = -\text{i}\int_{t_1}^{t_2} \text{d}t(\psi' - \psi) \tag{5-13-40}$$

而 $\psi'-\psi$ 为无穷小量，无穷小参数 χ 与时间无关．变量变换后仍满足同样的边界条件．边界条件和作用量均是 BRST 不变的．今计算积分测度

$$\mathscr{D}Z_\Sigma = \mathscr{D}q^A\, \mathscr{D}p_A\, \mathscr{D}\lambda^\alpha\, \mathscr{D}\pi_\alpha\, \mathscr{D}\eta^a\, \mathscr{D}\mathscr{P}_a$$

的变化．由于

$$\frac{\delta Z'_{\Sigma}(t)}{\delta Z_{\Lambda}(t')}=\delta_{\Lambda}^{\Sigma}\delta(t-t')+\frac{\partial\{Z_{\Sigma},\Omega\}}{\partial Z_{\Lambda}}(t)\delta(t-t')\chi-$$

$$\mathrm{i}\{Z_{\Sigma},\Omega\}(t)\frac{\partial(\psi'-\psi)}{\partial Z_{\Lambda}}(t')\qquad(5\text{-}13\text{-}41)$$

又(5-13-39)式为无穷小变换，于是超 Jacobi 行列式为

$$\det\left|\frac{\delta Z'_{\Sigma}(t)}{\delta Z_{\Lambda}(t')}\right|=1+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\qquad(5\text{-}13\text{-}42)$$

式中 $\operatorname{tr} A$ 代表矩阵 A 的超迹，且

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\{\Omega,\psi'-\psi\}\mathrm{d}t\qquad(5\text{-}13\text{-}43)$$

因此，积分测度 $\mathscr{D}Z_{\Sigma}$ 的改变适合

$$\mathscr{D}Z'_{\Sigma}=\mathscr{D}Z_{\Sigma}\exp\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\{\Omega,\psi'-\psi\}\mathrm{d}t\qquad(5\text{-}13\text{-}44)$$

将(5-13-44)式代入(5-13-36)式就得到路径积分与 ψ 无关，

$$Z[0]_{\psi}=Z[0]_{\psi'}\qquad(5\text{-}13\text{-}45)$$

这表明，选取不同的规范固定 Fermi 子 ψ，将得到同样的量子跃迁幅．量子规范自由度是通过 $H\to H+\{\psi,\Omega\}$ 实现的．

将鬼场分为两部分，即

$$\eta^{a}=(-(\mathrm{i})^{n_a+1}\mathscr{P}^{a},C^{a})\qquad(5\text{-}13\text{-}46)$$

$$\mathscr{P}_{a}=((\mathrm{i})^{n_a+1}\overline{C}_{a},\overline{\mathscr{P}}_{a})\qquad(5\text{-}13\text{-}47)$$

其中鬼场 C^{a} 和反鬼场 $\overline{C}_{a}$ 均是实的，它们分别共轭于 $\overline{\mathscr{P}}_{a}$ 和 $\mathscr{P}_{a}$．通常将规范固定 Fermi 子取为

$$\psi=(\mathrm{i})^{n_a+1}\overline{C}_{a}\chi^{a}+\overline{\mathscr{P}}_{a}\lambda^{a}\qquad(5\text{-}13\text{-}48)$$

式中 χ^{a} 不含鬼场和它们的正则共轭动量．

下面用 BFV 方法给出纯杨-Mills 场的路径积分量子化．

纯杨-Mills 场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F_{a}^{\mu\nu}\qquad(5\text{-}13\text{-}49)$$

式中

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu \qquad (5\text{-}13\text{-}50)$$

其中 f^a_{bc} 为规范群的结构常数．杨-Mills 势 A^a_μ 相应的正则动量

$$\pi^\mu_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^a_\mu} = - F^{0\mu}_a \qquad (5\text{-}13\text{-}51)$$

正则作用量

$$I^{\mathrm{P}}[A^a_k, \pi^k_a, \lambda^a] = \int \mathrm{d}x^0 \int \mathrm{d}^3 x (\dot{A}^a_k \pi^k_a - \mathscr{H}^0_{\mathrm{YM}} - \lambda^a \phi_a) \qquad (5\text{-}13\text{-}52)$$

Lagrange 乘子

$$\lambda^a = A^a_0 \qquad (5\text{-}13\text{-}53)$$

约束函数

$$\phi_a = - \partial_k \pi^k_a + f^a_{bc} \pi^k_c A^b_k \qquad (5\text{-}13\text{-}54)$$

而 Hamilton 量密度 $\mathscr{H}^0_{\mathrm{YM}}$仅含杨-Mills 势的空间分量 A^a_k 及其正则共轭动量 π^a_k，

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{YM}} = \frac{1}{2} \pi^a_k \pi^k_a + \frac{1}{4} F^a_{ij} F^{ij}_a \qquad (5\text{-}13\text{-}55)$$

将 Lagrange 乘子 λ^a 的正则共轭动量记为 π_a，那么

$$\pi_a = \pi^0_a \approx 0 \qquad (5\text{-}13\text{-}56)$$

式中 π^0_a 为杨-Mills 势 A^a_μ 正则共轭动量 π^μ_a 的时间分量．

由 $\mathscr{H}^0_{\mathrm{YM}}$和约束 ϕ_a 之间的 Poisson 括号，有

$$\{\mathscr{H}^0_{\mathrm{YM}}(x), \phi_a(x')\} = 0 \qquad (5\text{-}13\text{-}57)$$

$$\{\phi_a(x), \phi_b(x')\} = f^c_{ab} \phi_c(x) \delta(x - x') \qquad (5\text{-}13\text{-}58)$$

根据上述讨论，有

$$\Omega = \int \mathrm{d}^3 x \left(\phi_a C^a + \frac{1}{2} \overline{\mathscr{P}}_a f^a_{bc} C^b C^c - \mathrm{i} \mathscr{P}^a \pi_a \right) \qquad (5\text{-}13\text{-}59)$$

可观察量

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{H}^0_{\mathrm{YM}} \qquad (5\text{-}13\text{-}60)$$

在规范固定 Fermi 子

$$\psi = \int d^3x(i\,\overline{C}_a\chi^a + \overline{\mathscr{P}}_a\lambda^a) \qquad (5\text{-}13\text{-}61)$$

中，选取

$$\chi^a = \partial^k A_k^a \qquad (5\text{-}13\text{-}62)$$

由(5-13-59)、(5-13-61)式和(5-13-62)式得

$$\{\psi,\Omega\} = \int d^3x(-\pi_a\partial^k A_k^a - \lambda^a\phi_a + i\,\overline{C}_a\partial^k D_k C^a - i\,\overline{\mathscr{P}}_a\mathscr{P}^a + \lambda^a\,\overline{\mathscr{P}}_b f_{ac}^b C^c) \qquad (5\text{-}13\text{-}63)$$

将(5-13-59)～(5-13-63)式代入(5-13-36)式，对 π_a^k、$\mathscr{P}_a$、$\overline{\mathscr{P}}^a$ 和 π_a 积分，得

$$Z[0] = \langle \overset{(2)}{A_k^a}(x), t_2 | \overset{(1)}{A_k^a}(x), t_1 \rangle = \int \mathscr{D}A_\mu^a \prod_{t,x} \delta(\partial^\mu A_\mu^a)\exp i\{I_{YM} + I_{gh}\} \qquad (5\text{-}13\text{-}64)$$

式中

$$I_{YM} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \qquad (5\text{-}13\text{-}65)$$

$$I_{gh} = -i\int d^4x\, \partial^\mu \overline{C}_a\, D_\mu C^a \qquad (5\text{-}13\text{-}66)$$

这恰好是 § 5-11 中给出的结果．

可见，选取不同的 χ^a 既可导致不同形式的 $Z[0]$，也可以直接导出 § 5-11 中方法给出的结果．

参考文献

[1] Dirac P A M. Phys Zeit Sowj，1933，3：64

[2] Feynman R P. Rev Mod Phys，1948，20：267

[3] Feynman R P, Hibbs A R. Quantum Mechanics and Path Integral. New York：McGraw-Hill，1965

[4] Faddeev L D，Popov V N. Phys Lett，1967，B25：29

[5] Abers E S, Lee B W. Phys Rep, 1993, C9 : 1
[6] 戴元本. 相互作用的规范理论. 北京: 北京科学出版社, 1987
[7] Faddeev L D. Theor Math Phys, 1970, 1 : 1
[8] Senjanovic P. Ann Phys (N Y), 1976, 100 : 227
[9] Fradkin E S, Vilkovisky G A. Phys Lett, 1975, B55 : 224
[10] Batalin I A, Vilkovisky G A. Phys Lett, 1977, B69 : 309
[11] Fradkin E S, Fradkina T E. Phys Lett, 1978, B72 : 343
[12] Batalin I A, Fradkin E S. Phys Lett, 1983, B128 : 303
[13] Henneaux M. Phys Rep, 1985, 126 : 1
[14] Batalin I A, Vilkovisky G A. Phys Rev, 1983, D28 : 2567
[15] Gomis J, Paris J, Samuel S. Phys Rep, 1995, 259 : 1
[16] Li Z P (李子平). Chinese Phys Lett, 1993, 10 : 68
[17] Li Z P (李子平). Europhys Lett, 1993, 21 : 141
[18] Li Z P (李子平). Phys Rev, 1994, E50 : 876
[19] Wang A M , Ruan T N. Phys Rev, 1996, A54 : 57
[20] Faddeev L D, Jackiw R. Phys Rev Lett, 1988, 60 : 1692
[21] 李子平. 高能物理与核物理, 1979, 3 : 511
[22] Lee T D, Yang C N. Phys Rev, 1962, 128 : 885
[23] Henneaux M, Teitelboim C. Quantization of Gauge System. Princeton: Princeton University Press, 1992
[24] Faddeev L D, Slavnov A A. Gauge Fields. Massachusetts: Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1980
[25] 汪克林. 高能物理与核物理, 1981, 5 : 378
[26] 马千乘. 阮图南. 高能物理与核物理, 1985, 9 : 169
[27] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993
[28] Lerda A. Anyons. Berlin: Springer-Verlag, 1992
[29] Foussats A, Manavella E, Repetto C, et al . Int J Theor Phys, 1995, 34 : 1037
[30] Fradkin E S, Vasiliev M A. Phys Lett, 1977, B72 : 40
[31] Henneaux M. Phys Lett, 1983, B120 : 179

第六章

路径积分形式中的对称性

在路径积分量子化中，出现在路径积分中的量（包括积分测度）均是经典的数，这为分析系统的量子对称性提供了有用的工具．本章阐明了正规 Lagrange 量系统和奇异 Lagrange 量系统路径（泛函）积分中（基于 Faddeev-Senjanovic 量子化方案）的对称性，给出了系统在量子水平下的一些对称性质，导出了约束 Hamilton 系统相空间中定域、非定域和整体变换下的正则 Ward 恒等式，建立了正则形式的量子守恒理论，讨论了在杨-Mills 场论和 Chern-Simons 理论中的应用，论述了规范系统在位形空间中路径积分的对称性质．经典理论中对称性所联系的守恒律在量子理论中一般不再保持有效．这里发展的理论形式的突出优点在于勿需作出相空间路径积分中对正则动量的路径积分．在实际问题中要作出该积分往往是很困难的，甚至是不可能的（特别是对约束 Hamilton 系统）．相空间路径积分比位形空间中路径积分更基本．此处给出的理论形式具有更普遍的意义．

§6-1 相空间生成泛函的正则 Ward 恒等式

路径积分量子化在现代量子场论（特别是非 Abel 规范场论）中占重要地位．场论中传统的路径积分形式是在位形空间中给出的．在一定条件下，可将相空间路径积分中对正则动量的积分（或用 Faddeev-Popov 方法）转化为位形空间中的路径积分，将相空间中 Green 函数的生成泛函转化为位形空间中 Green 函数的生成泛函，进而导出系统的 Feynman 规则、Ward-Takahashi 恒等式，给

出理论可重整化的证明等．但是，当相空间路径积分不能作出对正则动量的积分时，特别是约束 Hamilton 系统（含复杂约束），要作出对动量的路径积分常常是很困难的，甚至是不可能的．可见，研究系统在相空间中生成泛函的性质就显得十分必要．相空间路径积分比位形空间路径积分更基本[1]，也可以说，后者是前者的特殊情况（动量可积情形）．因此，分析研究系统在相空间路径积分的正则对称性就具有更普遍的意义．

在量子场论中 Ward（或 Ward-Takahashi）恒等式不仅是证明理论可重整化的重要工具，而且还在一些具体计算中（如 QCD 中）也起重要作用，例如利用它可将高阶固有顶角的计算化为低阶固有顶角的计算等．传统的用路径积分方法导出 Ward 恒等式是通过位形空间的生成泛函给出的[2]，它只适用于相空间生成泛函对正则动量可积的情形．这里研究相空间生成泛函在正则变量的定域和整体变换下的性质，并建立正则形式的 Ward 恒等式．

首先研究有限自由度系统．设系统由正规Lagrange量 $L=L(q,\dot{q})$ $(q=[q^1,q^2,\cdots,q^n)])$ 来描述，其中 q 相应的正则动量记为 p $(p=[p_1,p_2,\cdots,p_n])$．在 Green 函数的相空间生成泛函中，对 q 和 p 分别引入外源 J 和 K，则生成泛函可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t[p\dot{q}-H_c(q,p)+Jq+Kp]\right\}\tag{6-1-1}$$

式中 H_c 为正则 Hamilton 量，

$$I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}t[p\dot{q}-H_c(q,p)]\tag{6-1-2}$$

为正则作用量，而 $J=(J_1,J_2,\cdots,J_n)$，$K=(K^1,K^2,\cdots,K^n)$．

系统的 Green 函数为

$$G_n(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\langle 0|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)|0\rangle=$$

$$\frac{1}{\mathrm{i}^n}\frac{\delta^n Z[J,K]}{\delta J(t_1)\,\delta J(t_2)\cdots\delta J(t_n)}\bigg|_{J=K=0} \tag{6-1-3}$$

可见，对动量引入外源，不影响 Green 函数的计算．

现讨论增广相空间的无穷小定域变换：

$$\left.\begin{aligned} t' &= t + \Delta t = t + R^\sigma \varepsilon_\sigma(t) \\ q'(t') &= q(t) + \Delta q(t) = q(t) + S^\sigma \varepsilon_\sigma(t) \\ p'(t') &= p(t) + \Delta p(t) = p(t) + T^\sigma \varepsilon_\sigma(t) \end{aligned}\right\} \tag{6-1-4}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(t)$为任意函数，$\varepsilon_\sigma(t)$及其所需的各级微商在时间区间的端点为 0；$R^\sigma = a_k^\sigma \mathrm{D}^k$；$S^\sigma = b_l^\sigma \mathrm{D}^l$；$T^\sigma = c_m^\sigma \mathrm{D}^m$（$\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$）．其中系数 a、b、c 等均为 t、q、p 的函数．在(6-1-4)式变换下，正则作用量(6-1-2)式的变分

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int\left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p}\delta p + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q}\delta q\right]\mathrm{d}t + \int \mathrm{D}[p\delta q + (p\dot{q} - H_{\mathrm{c}})\Delta t]\mathrm{d}t \tag{6-1-5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \delta q &= \Delta q - \dot{q}\,\Delta t \\ \delta p &= \Delta p - \dot{p}\,\Delta t \\ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q} &= -\dot{p} - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q} \\ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p} &= \dot{q} - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p} \end{aligned}\right\} \tag{6-1-6}$$

由 $\varepsilon_\sigma(t)$的端点条件，(6-1-5)式右端第二项积分可化为 0. 生成泛函(6-1-1)式在积分变量的变换下是不变的．假设(6-1-4)式变换的 Jacobi 行列式为 1，于是

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}p\,\mathscr{D}q\,\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}} + \Delta I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}t\Big(Jq + J\delta q + Kp + K\delta p + \mathrm{D}[(Jq + Kp)\Delta t]\Big)\right]\right\} =$$

$$\int \mathscr{D}p\,\mathscr{D}q\Big(1+\mathrm{i}\Big\{\Delta I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}t[J\delta q+K\delta p+$$

$$\mathrm{D}((Jq+Kp)\Delta t)]\Big\}\Big)\exp\Big\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}+$$

$$\mathrm{i}\int (Jq+Kp)\mathrm{d}t\Big\} \qquad (6\text{-}1\text{-}7)$$

由 $\varepsilon_\sigma(t)$ 的端点条件，略去等于 0 的项，得

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}p\,\mathscr{D}q\Big\{1+\mathrm{i}\Delta I^{\mathrm{p}}+\mathrm{i}\int \mathrm{d}t[J(\Delta q-\dot{q}\,\Delta t)+$$

$$K(\Delta p-\dot{p}\,\Delta t)]\Big\}\exp\Big\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}+\mathrm{i}\int (Jq+Kp)\mathrm{d}t\Big\}$$

$$(6\text{-}1\text{-}8)$$

生成泛函(6-1-1)式在(6-1-4)式变换下的不变性，意味着

$$\frac{\delta Z[J,K]}{\delta\varepsilon_\sigma(t)}=0 \qquad (6\text{-}1\text{-}9)$$

由(6-1-8)、(6-1-9)式得

$$\int \mathscr{D}p\,\mathscr{D}q\,\exp\Big\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}+\mathrm{i}\int (Jq+Kp)\mathrm{d}t\Big\}\frac{\delta}{\delta\varepsilon_\sigma(t)}\Big\{1+$$

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}t_1\Big[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q}(S^\sigma-\dot{q}\,R^\sigma)+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p}(T^\sigma-\dot{p}\,R^\sigma)+$$

$$J(S^\sigma-\dot{q}\,R^\sigma)+K(T^\sigma-\dot{p}\,R^\sigma)\Big]\varepsilon_\sigma(t_1)\Big\}=0 \qquad (6\text{-}1\text{-}10)$$

将(6-1-10)式中部分积分后，再对 $\varepsilon_\sigma(t)$ 求泛函微商，就得到

$$\Big[\tilde{T}^\sigma\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p}\Big)-\tilde{R}^\sigma\Big(\dot{p}\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p}\Big)+\tilde{S}^\sigma\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q}\Big)-\tilde{R}^\sigma\Big(\dot{q}\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q}\Big)+\tilde{S}^\sigma J-$$

$$\tilde{R}^\sigma(\dot{q}\,J)+\tilde{T}^\sigma K-\tilde{R}^\sigma(\dot{p}\,K)\Big]\Big|_{\substack{q\to-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J}\\ p\to-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta K}}}Z[J,K]=0 \qquad (6\text{-}1\text{-}11)$$

式中 $\tilde{R}^\sigma$、$\tilde{S}^\sigma$、$\tilde{T}^\sigma$ 分别是 R^σ、S^σ、T^σ 的伴随算符[3]. 例如：R^σ 的伴随算符 $\tilde{R}^\sigma$ 适合

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) R^\sigma g(t) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} g(t) \tilde{R}^\sigma f(t) \mathrm{d}t + [\cdot]_{t_1}^{t_2} \quad (6\text{-}1\text{-}12)$$

式中$[\cdot]_{t_1}^{t_2}$代表端点项，并称(6-1-11)式为相空间中定域变换下的正则形式 Ward 恒等式.

现在考虑奇异 Lagrange 量的系统，其 Hess 矩阵是退化的.这种情况下系统由正则变量描述时，正则变量间在相空间中存在固有约束.该约束 Hamilton 系统的 Green 函数的生成泛函可写为(见§5-9)

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}q\, \mathscr{D}p \prod_{i,k,l} \delta(\theta_i)\, \delta(\Lambda_k)\, \delta(\Omega_l)\, \det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}| \cdot$$
$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2} \exp\left\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}} + \int (Jq + Kp)\mathrm{d}t]\right\}$$
$$(6\text{-}1\text{-}13)$$

式中：$\Lambda_k \approx 0 (k=1,2,\cdots,K_1)$代表第一类约束；$\theta_i \approx 0 (i=1,2,\cdots,I_1)$代表第二类约束；$\Omega_k \approx 0 (k=1,2,\cdots,K_1)$代表与第一类约束相联系的规范条件.

利用δ-函数以及 Grassmann 变量 $C(t)$和 $C^+(t)$的积分性质：

$$\det|\{A_k,B_l\}| = \int \mathscr{D}C_l(t')\, \mathscr{D}C_k^+(t) \cdot$$
$$\exp\left[\mathrm{i} \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}t' C_k^+(t) \{A_k(t), B_l(t')\}\, C_l(t')\right] \quad (6\text{-}1\text{-}14)$$

可将(6-1-13)式化为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}q\, \mathscr{D}p\, \mathscr{D}C\, \mathscr{D}C^+\, \mathscr{D}\lambda \cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + \mathrm{i} \int (Jq + Kp)\mathrm{d}t\right\} \quad (6\text{-}1\text{-}15\mathrm{a})$$

式中

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}t\, L_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}t (L^{\mathrm{p}} + L_m + L_{\mathrm{gh}}) \quad (6\text{-}1\text{-}15\mathrm{b})$$

$$L_m = \lambda_i\theta_i + \lambda_k\theta_k + \lambda_l\Omega_l,\ \lambda_m = (\lambda_i,\lambda_k,\lambda_l) \quad (6\text{-}1\text{-}15\mathrm{c})$$

$$L_{gh}=\int dt'[C_k^+\{\Lambda_k,\Omega_l\}C_l+\frac{1}{2}C_i^+\{\theta_i,\theta_j\}C_j] \qquad (6\text{-}1\text{-}15d)$$

λ_m 为 Lagrange 乘子，L_m 表示与乘子有关的 Lagrange 量．在非 Abel 规范理论中，L_{gh}相应于鬼粒子项．在(6-1-4)式变换下(可包括 $C(t)$和 $C^+(t)$的变换)，生成泛函(6-1-15a)也是不变的．类似可得，奇异 Lagrange 量系统的相空间广义 Ward 恒等式，只要将(6-1-11)式中的 I^p 用 I^p_{eff}代替即可．

现在研究相空间生成泛函在正则变量整体变换下的性质．首先考虑正规 Lagrange 量系统．相空间中无穷小整体变换为

$$\left.\begin{aligned}t'&=t+\Delta t=t+\varepsilon_\sigma\tau^\sigma(t;q,p)\\q'(t')&=q(t)+\Delta q(t)=q(t)+\varepsilon_\sigma\xi^\sigma(t;q,p)\\p'(t')&=p(t)+\Delta p(t)=p(t)+\varepsilon_\sigma\eta^\sigma(t;q,p)\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}1\text{-}16)$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小参数；$\tau^\sigma(t;q,p)$、$\xi^\sigma(t;q,p)$、$\eta^\sigma(t;q,p)$为(6-1-16)变换式的生成函数．变换(6-1-16)式包括时空对称变换和内部对称变换．在(6-1-16)式变换下，正则作用量 I^p 的变分仍为(6-1-5)式．假设变换(6-1-16)式的 Jacobi 行列式为 1，相空间生成泛函(6-1-1)式在(6-1-16)式变换下是不变的，于是有

$$\begin{aligned}Z[J,K]=&\int\mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,\exp\Big(\mathrm{i}\Big\{I^p+\Delta I^p+\int dt\Big[Jq+\\&J\delta q+Kp+K\delta p+D[(Jq+Kp)\Delta t]\Big]\Big\}\Big)=\\&\int\mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,\exp\Big(\mathrm{i}\Big\{I^p+\Delta I^p+\int dt[Jq+\\&Kp+\varepsilon_\sigma(J(\xi-\dot{q}\tau^\sigma)+K(\eta^\sigma-\dot{p}\tau^\sigma)+\\&D([Jq+Kp]\tau^\sigma))]\Big\}\Big)\end{aligned} \qquad (6\text{-}1\text{-}17)$$

如果在(6-1-16)式变换下，正则作用量 I^p 不变，由(6-1-17)式得

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,\exp\Big\{\mathrm{i}\Big[I^p+\int(Jq+Kp)dt\Big]\Big\}\cdot$$

$$\left\{1 + \mathrm{i}\varepsilon_\sigma\int \mathrm{d}t\left[J(\xi^\sigma - \dot{q}\,\tau) + K(\eta^\sigma - \dot{q}\,\tau^\sigma) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{D}([Jq + Kp]\tau^\sigma)\right]\right\} =$$

$$\left(1 + \varepsilon_\sigma\int \mathrm{d}t\left\{J\left[\xi^\sigma - \tau^\sigma \mathrm{D}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)\right] + K\left[\eta^\sigma - \tau^\sigma \mathrm{D}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{D}[(Jq + Kp)\tau^\sigma]\right\}\right)\Bigg|_{\substack{q\to -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J}\\ p\to -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta K}}} Z[J,K] \tag{6-1-18}$$

设(6-1-16)式变换的 Jacobi 行列式为 1 时，就得到系统整体对称变换下，系统相空间中生成泛函应满足的关系式：

$$\int \mathrm{d}t\left\{J\left[\xi^\sigma - \tau^\sigma \mathrm{D}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)\right] + K\left[\eta^\sigma - \tau^\sigma \mathrm{D}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right] + \right.$$

$$\left.\mathrm{D}[(Jq + Kp)\tau^\sigma]\right\}\Bigg|_{\substack{q\to -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J}\\ p\to -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta K}}} Z[J,K] = 0 \tag{6-1-19}$$

(6-1-19)式可称为正规 Lagrange 量系统在整体对称变换下的正则 Ward 恒等式.

对奇异 Lagrange 系统，类似可以得到，如果有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 在增广相空间中的整体变换下不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1，那么奇异 Lagrange 量系统在相空间中的生成泛函仍满足形如(6-1-19)式的关系式.

§6-2 路径积分中的整体正则对称性和守恒律

对称性的研究在物理学的众多领域有重要意义. 系统在李群作用下的对称性的分析通常是在经典水平下讨论的. 量子理论中研究了分立对称性和连续对称性所导致的守恒量. 在经典理论中连续对称所对应的守恒量通常是由 Noether 定理给出，而 Noether 定理及其推广传统的方式均是在位形空间中表述的[4]. 近来建立了相空间中正则形式的 Noether 定理和 Poincare-Cartan

积分不变量[5~7]. 微观粒子的运动是量子理论描述的,经典理论中的一些重要结果在量子理论中是否仍然有效,或者在什么条件下仍然保持,是一个值得讨论的问题.

动力学系统的量子化方案常用的有正则算符形式和路径积分形式. 路径积分量子化的一个突出优点是出现在路径积分中的量(包括积分测度)均是经典的数,这为分析系统的量子对称性提供了一个有用的工具. 量子系统的性质由 Green 函数的生成泛函导出[4],相空间路径积分比位形空间路径积分更基本[1]. 当相空间路径积分中对正则动量的路径积分为 Gauss 型时,可将其化为位形空间中的路径积分. 但是,对于约束结构较复杂的约束 Hamilton 系统,要作出对动量的路径积分常常是十分困难的,甚至是不可能的. 近来,我们从相空间 Green 函数的生成泛函出发,导出了量子系统的一系列定域和整体对称性[8~10]. 由奇异 Lagrange 量描述的系统在物理学众多领域中广泛存在. 描述自然界 4 种基本相互作用的理论(QED、QFD、QCD、GR)中的 Lagrange 量均是奇异的. 这里先给出了有限自由度约束 Hamilton 系统在相空间中量子水平的 Noether 定理.

从约束 Hamilton 系统在相空间中的 Green 函数的生成泛函出发,考虑系统在增广相空间中的整体对称性,可导出该系统在相空间中的量子形式的 Noether 定理.

设动力学系统由奇异 Lagrange 量 $L(q^i,\dot{q}^i)$来描述. 由于 Lagrange量的奇异性,在相空间中系统的运动被限制在约束所确定的超曲面上. 记 $\Lambda_k(q^i,p_i)\approx 0(k=1,2,\cdots,K')$为第一类约束;$\theta_j(q^i,p_i)\approx 0(j=1,2,\cdots,J')$为第二类约束;与第一类约束相应的规范条件记为 $\Omega_k(q^i,p_i)\approx 0$ $(k=1,2,\cdots,K')$. 其中 p_i 为 q^i 的正则动量,"$\approx$"代表等式在约束超曲面上成立. 按 Faddeev-Senjanovic量子化方案[8],此约束 Hamilton 系统 Green 函数的相空间中的生成泛函为

$$Z[J]=\int \mathscr{D}q^i\,\mathscr{D}p_i \prod_{j,k,l}\delta(\theta_j)\,\delta(\Lambda_k)\,\delta(\Omega_l)\,\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|\cdot$$
$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t(p_i\dot{q}^i -\right.$$
$$\left. H_c + J_i q^i)\right] \tag{6-2-1}$$

式中：H_c 为系统的正则 Hamilton 量；$J_i(t)$为 $q^i(t)$的外源(这里仅对坐标引入外源)；{ • , • }代表 Poission 括号．利用 δ-函数和 Grassmann 变量 $\eta(t)$和 $\eta^+(t)$的积分性质，可将(6-2-1)式写为

$$Z[J]=\int \mathscr{D}q^i\,\mathscr{D}p_i\,\mathscr{D}\lambda_m\,\mathscr{D}\eta\mathscr{D}\eta^+\cdot$$
$$\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t(L_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_i q^i)\right] \tag{6-2-2}$$

式中

$$\lambda_m=(\lambda_j,\lambda_k,\lambda_l)$$
$$L_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=L^{\mathrm{p}}+L_m+L_{\mathrm{gh}} \tag{6-2-3}$$
$$L^{\mathrm{p}}=p_i\dot{q}^i-H_c \tag{6-2-4}$$
$$L_m=\lambda_j\theta_j+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l \tag{6-2-5}$$
$$L_{\mathrm{gh}}=\int \mathrm{d}\tau[\eta_k^+(t)\{\Lambda_k(t),\Omega_l(\tau)\}\eta_l(\tau)+$$
$$\frac{1}{2}\eta_i^+(t)\{\theta_i(t),\theta_j(\tau)\}\eta_j(\tau)] \tag{6-2-6}$$

为简化记号，记 $q(t)=(q^i(t),\lambda_m(t),\eta_m^+(t),\eta_n(t))$，$p=(p_i)$，$J=(J_i)$，于是(6-2-2)式可写为

$$Z[J]=\int \mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t(L_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+Jq)\right] \tag{6-2-7}$$

下面考虑系统在增广相空间中整体对称变换下的性质．设增广相空间中无穷小整体变换为

$$\left.\begin{aligned} t' &= t+\Delta t = t+\varepsilon_\sigma\tau^\sigma(t;q,p)\\ q'(t') &= q(t)+\Delta q(t) = q(t)+\varepsilon_\sigma\xi^\sigma(t;q,p)\\ p'(t') &= p(t)+\Delta p(t) = p(t)+\varepsilon_\sigma\eta^\sigma(t;q,p)\end{aligned}\right\} \tag{6-2-8}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小参数；$\tau^\sigma(t;q,p)$、$\xi^\sigma(t;q,p)$、$\eta^\sigma(t;q,p)$为变换(6-2-8)式的生成函数．在(6-2-8)式变换下，系统的有效正则作用量

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}tL_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$$

的变分为

$$\Delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int\left[\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta p}\delta p+\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta q}\delta q\right]\mathrm{d}t+\int\mathrm{D}[p\delta q+(p\dot{q}-H_{\mathrm{eff}})\Delta t]\mathrm{d}t \tag{6-2-9}$$

式中 $\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$，而

$$\delta q=\Delta q-\dot{q}\,\Delta t,\ \delta p=\Delta p-\dot{p}\,\Delta t$$

$$\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta q}=-\dot{p}-\frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial q},\ \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta p}=\dot{q}-\frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial p} \tag{6-2-10}$$

其中 H_{eff}为与 $L_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$相应的 Hamilton 量．

假设系统的有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$在(6-2-8)式变换下保持不变，将(6-2-8)式的整体变换定域化，考虑到如下定域变换：

$$\left.\begin{aligned}t'&=t+\Delta t=t+\varepsilon_\sigma(t)\tau^\sigma(t;q,p)\\q'(t')&=q(t)+\Delta q(t)=q(t)+\varepsilon_\sigma(t)\xi^\sigma(t;q,p)\\p'(t')&=p(t)+\Delta p(t)=p(t)+\varepsilon_\sigma(t)\eta^\sigma(t;q,p)\end{aligned}\right\} \tag{6-2-11}$$

式中 $\varepsilon_\sigma(t)(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意函数，它们及其所需的各级微商在时间区间的端点为 0. 当 $\varepsilon_\sigma(t)=\varepsilon_\sigma$(参数)时，有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$在其变换下不变．在(6-2-11)式变换下，$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$的变分为

$$\begin{aligned}\Delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=&\int\left(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta p}\delta p+\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta q}\delta q\right)\mathrm{d}t+\int\mathrm{D}[p\delta q+(p\dot{q}-H_{\mathrm{eff}})\Delta t]\mathrm{d}t=\\&\int\mathrm{d}t\varepsilon_\sigma(t)\left\{\left(-\dot{p}-\frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial q}\right)(\xi^\sigma-\dot{q}\,\tau^\sigma)+\left(\dot{q}-\frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial p}\right)\cdot\right.\\&\left.(\eta^\sigma-\dot{p}\,\tau^\sigma)+\mathrm{D}[(p\dot{q}-H_{\mathrm{eff}})\tau^\sigma+p(\xi^\sigma-\dot{q}\,\tau^\sigma)]\right\}+\\&\int\mathrm{d}t[(p\dot{q}-H_{\mathrm{eff}})\tau^\sigma\mathrm{D}\varepsilon_\sigma(t)+p(\xi^\sigma-\dot{q}\,\tau^\sigma)\mathrm{D}\varepsilon_\sigma(t)]\end{aligned} \tag{6-2-12}$$

由于已假设有效正则作用量 $I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$ 在整体变换(6-2-8)式下不变，因此(6-2-12)式中的第一个积分为 0. 根据 $\varepsilon_\sigma(t)$ 的端点条件，(6-2-12)式又可写为

$$\Delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} = \int \mathrm{d}t\{[(p\dot{q} - H_{\mathrm{eff}})\tau^\sigma + p(\xi^\sigma - \dot{q}\,\tau^\sigma)]\mathrm{D}\varepsilon_\sigma(t)\} = -\int \mathrm{d}t\varepsilon_\sigma(t)\mathrm{D}[(p\dot{q} - H_{\mathrm{eff}})\tau^\sigma + p(\xi^\sigma - \dot{q}\,\tau^\sigma)] \tag{6-2-13}$$

设变换(6-2-11)式的 Jacobi 行列式为 1，由于生成泛函 $Z[J]$ 在(6-2-11)式变换下不变，有

$$Z[J] = \int \mathscr{D}p\,\mathscr{D}q\,\exp\left\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} + \mathrm{i}\int Jq\mathrm{d}t\right\}\left(1 - \mathrm{i}\int \mathrm{d}t\varepsilon_\sigma(t)\cdot\{\mathrm{D}[(p\dot{q} - H_{\mathrm{eff}})\tau^\sigma + p(\xi^\sigma - \dot{q}\,\tau^\sigma)] + J(\xi^\sigma - \dot{q}\,\tau^\sigma)\}\right) \tag{6-2-14}$$

对(6-2-14)式关于 $\varepsilon_\sigma(t)$ 求泛函微商，然后让外源 $J=0$，得到

$$\langle 0|T^*(p\xi^\sigma - H_{\mathrm{eff}}\tau^\sigma)|0\rangle = \mathrm{const} \qquad \sigma = (1,2,\cdots,r) \tag{6-2-15}$$

式中：$|0\rangle$ 代表系统的基态；T^* 为一种特定形式的编时乘积[2]，它有如下意义：

(1)T^* 有编时意义；它是通常的编时乘积 T；

(2)$\langle 0|T^*[\mathrm{D}q^i(t)\cdots]|0\rangle = \mathrm{D}\langle 0|T[q^i(t)\cdots]|0\rangle$ (6-2-16)

于是就得到量子情形下相空间中正则形式 Noether 定理：在增广相空间中的整体变换下，如果系统的有效正则作用量不变，且变换的 Jocobi 行列式为 1，那么该系统存在量子守恒律(6-2-15)式.

量子守恒律(6-2-15)式与正则 Noether 定理给出的经典守恒律相对应. 由于奇异 Lagrange 系统在相空间中存在固有约束，量子化后系统的有效 Hamilton 量 H_{eff} 一般不同于正则 Hamilton 量 H_{c}. 此外，量子水平除要求变换(6-2-8)式保持有效正则作用量

$I^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}$不变外，还必须保持路径积分测度不变，才能有量子守恒律(6-2-15)式．可见，在经典理论中，对称性所联系的守恒律在量子理论中一般不再保持．这个问题在本章后面研究场论中的对称性时，还要进行详细讨论．

§6-3 定域正则变量变换和正则 Ward 恒等式

定域规范不变的 Lagrange 量是奇异的．用奇异 Lagrange 量描述的系统在相空间中含固有约束，即为约束 Hamilton 系统．仅含第一类约束的系统的路径(泛函)积分量子化首先是 Faddeev 给出的，Senjanovic 将其推广到含第二类约束的系统．至今规范场和引力场中出现的量子化问题已基本解决[11]，特别是基于 BRST 不变性的 BFV 量子化方案更是受到广泛的关注[12]．无论是正规 Lagrange 量系统还是奇异 Lagrange 量系统(基于 Faddeev-Senjanovic 的路径积分量子化方案)，Green 函数的相空间生成泛函占有基本的地位．当相空间路径积分中关于正则动量的积分为 Gauss 型时，可作出对动量的积分，这时用路径积分方法导出的 Ward 恒等式就是通过位形空间中的生成泛函实现的[2]，它仅适用于相空间路径积分中关于正则动量的积分为可积的情形．相空间路径积分适用于普遍情形，它比位形空间路径积分更基本[1]．对约束 Hamilton 系统，当约束结构复杂时，要作出相空间路径积分中关于正则动量的积分往往是很困难的，甚至是不可能的[13]．因此，从相空间路径积分来研究系统的量子对称性质，具有更重要的意义．下面讨论场论中的定域变换，并建立相应的正则 Ward 恒等式．

1. 正规 Lagrange 量系统

考虑一个由场 $\phi^{\alpha}(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$来描述的系统，其中 α 为不同场或场的不同分量的指标．场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\phi^{\alpha},$

$\phi^{\alpha}_{,\mu}$)，$\phi^{\alpha}_{,\mu}=\partial_{\mu}\phi^{\alpha}$，$\partial_{\mu}=\partial/\partial x^{\mu}$，$x=(t,\boldsymbol{x})$．就正规 Lagrange 量系统而言，正则 Hamilton 量

$$H_{c}=\int d^{3}x\mathscr{H}_{c}=\int d^{3}x(\pi_{\alpha}\dot{\phi}^{\alpha}-\mathscr{L}) \tag{6-3-1}$$

是独立正则变量 $\phi^{\alpha}(x)$ 和 $\pi_{\alpha}(x)=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\phi}^{\alpha}(x)$ 的泛函．这里对 ϕ^{α} 和 π_{α} 分别引进外源 J_{α} 和 K^{α}，其生成泛函可写为[14]

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}\exp\{i[I^{p}+\int d^{4}x(J_{\alpha}\phi^{\alpha}+K^{\alpha}\pi_{\alpha})]\} \tag{6-3-2}$$

式中

$$I^{p}=\int d^{4}x\mathscr{L}^{p}=\int d^{4}x(\pi_{\alpha}\dot{\phi}^{\alpha}-\mathscr{H}_{c}) \tag{6-3-3}$$

是场的正则作用量．在 $J_{\alpha}=K^{\alpha}=0$ 附近展开 $Z[J,K]$，有

$$Z[J,K]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}}{n!}\int d^{4}x_{1}\cdots d^{4}x_{n}G^{p}(x_{1},\cdots,x_{n})J_{\alpha}(x_{1})\cdots J_{\alpha}(x_{k})K^{\alpha}(x_{k+1})\cdots K^{\alpha}(x_{n}) \tag{6-3-4}$$

式中

$$G^{p}(x_{1},\cdots,x_{k},\cdots,x_{n})=\frac{1}{i^{n}}\frac{\delta^{n}Z[J,K]}{\delta J_{\alpha}(x_{1})\cdots\delta J_{\alpha}(x_{k})\delta K^{\alpha}(x_{k+1})\cdots\delta K^{\alpha}(x_{n})}\bigg|_{J_{\alpha}=K^{\alpha}=0} \tag{6-3-5}$$

显然，

$$G(x_{1},x_{2},\cdots,x_{n})=\frac{1}{i^{n}}\frac{\delta^{n}Z[J,K]}{\delta J_{\alpha}(x_{1})\delta J_{\alpha}(x_{2})\cdots\delta J_{\alpha}(x_{n})}\bigg|_{J_{\alpha}=K^{\alpha}=0}=\langle 0|[T\hat{\phi}^{\alpha}(x_{1})\hat{\phi}^{\alpha}(x_{2})\cdots\hat{\phi}^{\alpha}(x_{n})]|0\rangle \tag{6-3-6}$$

是普通 Green 函数．可见，对动量 π_{α} 引入外源 K^{α}，不影响对 Green 函数的计算．

在生成泛函(6-3-2)式中，对动量积分为 Gauss 型或 Feynman

型的情况下，(6-3-2)式可化为位形空间的路径积分[15]，其有效 Lagrange 量可能和原来的不同．李政道和杨振宁等人给出了“质量”依赖于坐标(或场变量)情形下位形空间中的路径积分形式[16,17]．对“质量”依赖于坐标和动量的情形，位形空间路径积分的形式在文献[18]中已给出．在上述后两种情形中，有效 Lagrange 量含有 δ-函数的奇异性，这种奇异性可在重整化过程中清除[18]．一般情形下，(6-3-2)式不能通过对动量路径积分得到简化．尤其对约束 Hamilton 系统，要作出对动量积分是很困难的，甚至是不可能的．因此，研究生成泛函在相空间无穷小正则变量变换下的性质是必要的．利用这些变换性质可导出相空间的 Ward 恒等式[19]，从而，得到 Green 函数间一些新的关系式．

现考虑相空间中无穷小变换：

$$\left.\begin{aligned}\phi^\alpha(x)\rightarrow\phi^{\alpha'}(x)&=\phi^\alpha(x)+\delta\phi^\alpha(x)=\\&\phi^\alpha(x)+Q^\alpha(\phi,\pi,\varepsilon_1^\sigma,\varepsilon_2^\sigma)\\\pi_\alpha(x)\rightarrow\pi'_\alpha(x)&=\pi_\alpha(x)+\delta\pi_\alpha(x)=\\&\pi_\alpha(x)+P_\alpha(\phi,\pi,\varepsilon_1^\sigma,\varepsilon_2^\sigma)\end{aligned}\right\}\tag{6-3-7}$$

式中 $\varepsilon_1^\alpha(x)$ 和 $\varepsilon_2^\alpha(x)$ $(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 是任意函数，在时空区域的边界上为 0．假设(6-3-7)式变换下的 Jacobian 行列式为 $J[\phi,\pi,\varepsilon_1^\sigma,\varepsilon_2^\sigma]$，正则作用量(6-3-3)式的改变为 δI^{p}．在(6-3-7)式变换下，生成泛函(6-3-2)式是不变的，从而可得到相空间中的正则 Ward 恒等式，即

$$\int\mathscr{D}\phi^\alpha\,\mathscr{D}\pi_\alpha\frac{\delta}{\delta\varepsilon_i^\sigma(x)}\Big\{J[\phi,\pi,\varepsilon_1^\sigma,\varepsilon_2^\sigma][1+\mathrm{i}\delta I^{\mathrm{p}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(J_\alpha\delta\phi^\alpha+$$

$$K^\alpha\delta\pi_\alpha)]\Big\}\Big|_{\varepsilon_1^\sigma=\varepsilon_2^\sigma=0}\exp\Big\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J_\alpha\phi^\alpha+K^\alpha\pi_\alpha)]\Big\}=0$$

$$(i=1,2)\tag{6-3-8}$$

或者

$$\frac{\delta}{\delta\varepsilon_i^\sigma(x)}\left\{J[\phi^\alpha,\pi_\alpha,\varepsilon_1^\sigma,\varepsilon_2^\sigma][1+\mathrm{i}\delta I^{\mathrm{p}}+\right.$$

$$\left.\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(J_\alpha\delta\phi^\alpha+K^\alpha\delta\pi_\alpha)]\right\}_{\substack{\phi^\alpha\to\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_\alpha}\\ \pi_\alpha\to\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta K^\alpha}}} Z[J,K]=0 \qquad (6\text{-}3\text{-}9)$$

例如：相空间中无穷小平移变换为

$$\left.\begin{aligned}\phi^\alpha(x)&\to\phi^{\alpha'}(x)=\phi^\alpha(x)+\varepsilon_1^\sigma(x)\\ \pi_\alpha(x)&\to\pi'_\alpha(x)=\pi_\alpha(x)+\varepsilon_2^\sigma(x)\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}3\text{-}10)$$

在(6-3-10)式变换下的 Jacobian 行列式为 1. 正则作用量的改变为

$$\delta I^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi^\alpha}\varepsilon_1^\alpha(x)+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_\alpha}\varepsilon_2^\alpha(x)+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_\alpha(x)\varepsilon_1^\sigma(x))\right] \qquad (6\text{-}3\text{-}11)$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi^\alpha}=-\dot{\pi}_\alpha-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\phi^\alpha},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_\alpha}=\dot{\phi}^\alpha-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi_\alpha} \qquad (6\text{-}3\text{-}12)$$

由 $\varepsilon_1^\alpha(x)$和 $\varepsilon_2^\alpha(x)$的边界条件和生成泛函(6-3-2)式在(6-3-10)式变换下的不变性，可得到相空间中正则 Ward 恒等式，即

$$\int\mathscr{D}\phi^\alpha\,\mathscr{D}\pi_\alpha\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi^\alpha}+J_\alpha\right)\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J_\alpha\phi^\alpha+K^\alpha\pi_\alpha)\right]\right\}=0$$

$$(6\text{-}3\text{-}13\mathrm{a})$$

$$\int\mathscr{D}\phi^\alpha\,\mathscr{D}\pi_\alpha\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_\alpha}+K^\alpha\right)\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J_\alpha\phi^\alpha+K^\alpha\pi_\alpha)\right]\right\}=0$$

$$(6\text{-}3\text{-}13\mathrm{b})$$

让外源 $J_\alpha=K^\alpha=0$，由(6-3-13a)、(6-3-13b)式得

$$\langle 0|T^*\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi^\alpha}\right)|0\rangle=0,\ \langle 0|T^*\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_\alpha}\right)|0\rangle=0 \quad (6\text{-}3\text{-}14)$$

式中 T^* 表示一种特定的编时乘积[2]. 对(6-3-13a)式关于$J_\alpha(x)$求 n 次泛函微商，并让

$$t_1, t_2, \cdots, t_m \to \infty; \quad t_{m-1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \to -\infty$$

后，可得

$$\langle \text{out}, m | \frac{\delta I^p}{\delta \phi^\alpha} | n - m, \text{in} \rangle = 0 \tag{6-3-15}$$

由于 m 和 n 是任意的，由(6-3-15)式得

$$\dot{\pi}_\alpha(x) = -\frac{\delta H_c}{\delta \phi_\alpha(x)} \tag{6-3-16a}$$

类似地，从(6-3-13b)式出发，可得

$$\dot{\phi}_\alpha(x) = \frac{\delta H_c}{\delta \pi_\alpha(x)} \tag{6-3-16b}$$

(6-3-16)式是系统的量子正则方程．

现讨论增广相空间中一般的无穷小变换：

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu'} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + R^\mu_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \\ \phi^{\alpha'}(x') &= \phi^\alpha(x) + \Delta\phi^\alpha(x) = \\ &\qquad \phi^\alpha(x) + S^\alpha_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \\ \pi'_\alpha(x') &= \pi_\alpha(x) + \Delta\pi_\alpha(x) = \\ &\qquad \pi_\alpha(x) + T_{\alpha\sigma}\varepsilon^\sigma(x) \end{aligned}\right\} \tag{6-3-17}$$

这里 $\varepsilon^\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$是无穷小任意函数，$\varepsilon^\sigma(x)$及其各级微商在时空区域的边界上为 0，并且

$$\left.\begin{aligned} &R^\mu_\sigma = a^{\mu\nu(k)}\,\partial_{\nu(k)}, \quad S^\alpha_\sigma = b^{\alpha\nu(l)}_\sigma\,\partial_{\nu(l)} \\ &T_{\alpha\sigma} = c^{\nu(m)}_{\alpha\sigma}\,\partial_{\nu(m)} \\ &\partial_{\nu(n)} = \underbrace{\partial_\nu\partial_\mu\cdots\partial_\lambda\partial_\rho}_{n}, \nu(n) = \underbrace{\nu\mu\cdots\lambda\rho}_{n} \end{aligned}\right\} \tag{6-3-18}$$

a、b、c 是 x、ϕ^α、π_α 的函数．在(6-3-17)式变换下，正则作用量的改变为

$$\Delta I^p = \int d^4x \left\{ \frac{\delta I^p}{\delta\phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha + \frac{\delta I^p}{\delta\pi_\alpha}\,\delta\pi_\alpha + \right.$$
$$\left. \partial_\mu[(\pi_\alpha\dot{\phi}^\alpha - \mathscr{H}_c)\,\Delta x^\mu] + \frac{d}{dt}(\pi_\alpha\delta\phi^\alpha) \right\} \tag{6-3-19}$$

这里

$$\delta\phi^{\alpha} = \Delta\phi^{\alpha} - \phi^{\alpha}_{,\mu}\Delta x^{\mu},\ \delta\pi_{\alpha} = \Delta\pi_{\alpha} - \pi_{\alpha,\mu}\Delta x^{\mu} \qquad (6\text{-}3\text{-}20)$$

(6-3-17)式变换下的 Jacobian 行列式记为 $J_{\varepsilon}[\phi^{\alpha},\pi_{\alpha},\varepsilon^{\sigma}]$. 由于 $\varepsilon^{\sigma}(x)$ 的边界条件和生成泛函(6-3-2)式在(6-3-17)式变换下的不变性(这意味着 $\delta Z/\delta\varepsilon^{\sigma}|_{\varepsilon^{\sigma}=0}=0$),从(6-3-2)、(6-3-19)式可以得到相空间中正则 Ward 恒等式,即

$$\Big[J^{0}_{\sigma} + \widetilde{S}^{\alpha}_{\sigma}\left(\frac{\delta I^{p}}{\delta\phi^{\alpha}}\right) - \widetilde{R}^{\mu}_{\sigma}\left(\phi^{\alpha}_{,\mu}\frac{\delta I^{p}}{\delta\phi^{\alpha}}\right) + \widetilde{S}^{\alpha}_{\sigma}J_{\alpha} - \widetilde{R}^{\mu}_{\sigma}(\phi^{\alpha}_{,\mu}J_{\alpha}) +$$
$$\widetilde{T}_{\alpha\sigma}\left(\frac{\delta I^{p}}{\delta\pi_{\alpha}}\right) - \widetilde{R}^{\mu}_{\sigma}\left(\pi_{\alpha,\mu}\frac{\delta I^{p}}{\delta\pi_{\alpha}}\right) + \widetilde{T}_{\alpha\sigma}K^{\alpha} -$$
$$\widetilde{R}^{\mu}_{\sigma}(\pi_{\alpha,\mu}K^{\alpha})\Big]_{\substack{\phi^{\alpha}\to\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_{\alpha}} \\ \pi_{\alpha}\to\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta K^{\alpha}}}} Z[J,K] = 0 \qquad (6\text{-}3\text{-}21)$$

这里

$$J^{0}_{\sigma} = -\left.\frac{i\delta J_{\varepsilon}[\phi^{\alpha},\pi_{\alpha},\varepsilon^{\sigma}]}{\delta\varepsilon^{\sigma}}\right|_{\varepsilon^{\sigma}=0}$$

在导出(6-3-21)式的过程中,利用了 $J[\phi^{\alpha},\pi_{\alpha},0]=1$. $\widetilde{R}^{\mu}_{\sigma}$、$\widetilde{S}^{\alpha}_{\sigma}$ 和 $\widetilde{T}_{\alpha\sigma}$ 分别是相应于 R^{μ}_{σ}、S^{α}_{σ} 和 $T_{\alpha\sigma}$ 的伴随算符[3]. 对方程(6-3-21)式的外源求泛函微商,然后让所有外源为 0,就可以得到相空间中另外的 Ward 恒等式. 如果用 $\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\phi}^{\alpha}$ 代替 π_{α},即 $\pi_{\alpha}\to\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\phi}^{\alpha}$,Ward 恒等式(6-3-21)式可以用位形空间中的变量来表述.

2. 奇异 Lagrange 量系统

考虑一个奇异 Lagrange 量系统,其 Hess 矩阵

$$[H_{\alpha\beta}]=\left[\frac{\partial^{2}\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^{\alpha}\partial\dot{\phi}^{\beta}}\right]$$

是退化的. 在这种情形下,用正则变量描述时,系统在相空间含固有约束. 由约束的自恰性(稳定性)条件,根据 Dirac-Bergmann 算法,可以逐步确定其次级约束. 设 $\Lambda_{k}\approx 0(k=1,2,\cdots,K_{1})$ 为第一类约束;$\theta_{i}(i=1,2,\cdots,I_{1})$ 为第二类约束;与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_{k}\approx 0(k=1,2,\cdots,K_{1})$. 按 Faddeev-Senjanovic 量子化

方案，此约束 Hamilton 系统 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\phi^{\alpha}\,\mathscr{D}\pi_{\alpha}\prod_{i,Qk,l}\delta(\theta_i)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|\cdot$$

$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J_{\alpha}\phi^{\alpha}+K^{\alpha}\pi_{\alpha})\right]\right\} \tag{6-3-22}$$

应用 δ-函数和 Grassman 变量 $C_l(x)$、$\overline{C}_k(x)$的积分性质：

$$\det|\{\Lambda_k(x),B_l(y)\}|=\int \mathscr{D}C_l(y)\,\mathscr{D}\overline{C}_k(x)\cdot$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\overline{C}_k(x)\{\Lambda_k(x),B_l(y)\}C_l(y)\right] \tag{6-3-23}$$

于是(6-2-22)式可以写为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\phi^{\alpha}\,\mathscr{D}\pi_{\alpha}\,\mathscr{D}\lambda_m\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\overline{C}\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\left[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J_{\alpha}\phi^{\alpha}+K^{\alpha}\pi_{\alpha})\right]\right\} \tag{6-3-24}$$

式中 $\lambda_m=(\lambda_k,\lambda_l,\lambda_i)$，而

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=&\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\\&\int \mathrm{d}^4x\Big\{\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l+\lambda_i\theta_i+\\&\int \mathrm{d}^4y[\overline{C}_k(x)\{\Lambda_k(x),\Omega_k(y)\}C_l(y)+\\&\frac{1}{2}\overline{C}_i(x)\{\theta_i(x),\theta_j(x)\}C_j(y)]\Big\}\end{aligned} \tag{6-3-25}$$

生成泛函(6-3-24)式，在其变量变换下不变，用正规 Lagrange 量系统中推导正则 Ward 恒等式的方法同样可导出相应的相空间中的正则 Ward 恒等式，这时只需用 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$代替(6-3-21)式中的 I^{p} 即可．特别是，生成泛函(6-3-24)式在正则变量的平移变换下不变，导出的量子正则方程为

$$\dot{\pi}_{\alpha}(x)=-\frac{\delta H_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^{\alpha}(x)},\ \dot{\phi}^{\alpha}(x)=\frac{\delta H_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi_{\alpha}(x)} \tag{6-3-26}$$

这里 H_{eff}是和有效 Lagrange 量 $L_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$相应的有效 Hamilton 量．

在约束 Hamilton 系统的经典理论中，Dirac 猜想所有的第一类约束（初级的和次级的）都是规范变换（它们生成物理态间等价的变换）的生成元．如果此猜想成立，那么约束 Hamilton 系统的经典动力学方程可以从扩展 Hamilton 量 H_E 中导出，H_E 中将含所有第一类约束（不仅含初级第一类约束而且还含次级第一类约束）．关于 Dirac 猜想存在不同的争议[20,21]，由以上讨论可知，在约束 Hamilton 系统量子理论中，量子正则方程(6-3-26)式是从有效 Hamilton 量 H_{eff} 导出的，它不仅含第一类约束而且还含第二类约束（包括次级第二类约束）．这与约束 Hamilton 系统的经典理论有很大不同．在量子理论中描述一个约束 Hamilton 系统时，更基本的量是生成泛函，而不是经典运动方程．

§ 6-4 规范不变有质量矢量场

规范不变有质量矢量场的 Lagrange 量为[22]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi - mA_\mu)(\partial^\mu\phi - mA^\mu) \tag{6-4-1}$$

式中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{6-4-2}$$

$\phi(x)$为标量场．下面给出正则形式的 Ward 恒等式对这个模型的应用．

相应于场 $A_\mu(x)$和 $\phi(x)$的正则动量分别为

$$\pi^\mu(x) = -F^{0\mu}(x),\ \pi(x) = \dot{\phi}(x) - mA^0(x) \tag{6-4-3}$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ik}^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}m^2A_i^2 - mA_i\partial_i\phi + (\partial_i\pi_i + m\pi)A^0 \tag{6-4-4}$$

初级约束和次级约束分别为

$$\phi^0 = \Lambda_1 = \pi^0(x) \approx 0 \tag{6-4-5}$$

$$\phi^1 = \Lambda_2 = -\partial_i\pi^i - m\pi \approx 0 \tag{6-4-6}$$

它们是第一类约束．根据§3-5中的讨论，规范生成元

$$G = \int d^3x[\varepsilon(x)(\partial_i\pi_i + m\pi) + \varepsilon(x)_{,0}\pi^0] =$$

$$\int d^3x[\pi_\mu\partial^\mu\varepsilon(x) + m\pi\varepsilon(x)] \tag{6-4-7}$$

由这个生成元产生的变换为

$$\left.\begin{aligned} &\delta A_\mu(x) = \{A_\mu(x), G\} = \partial_\mu\varepsilon(x),\ \ \delta\pi^\mu(x) = 0 \\ &\delta\phi(x) = m\varepsilon(x),\quad \delta\pi(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-4-8}$$

在(6-4-8)式变换下，系统的 Lagrange 量不变.

采用路径积分量子化，对第一类约束选取相应的规范条件. 考虑取库仑规范 $\Omega_2 = \partial_i A_i = 0$，由 Ω_2 的自洽性要求，就有另一规范约束 $\Omega_1 = \partial_i\pi^i + \nabla^2 A^2 \approx 0$. 不难验证，$\det|\{\Lambda_\alpha, \Omega_\beta\}|$ $(\alpha,\beta = 1,2)$ 与场量无关，可将这个因子从生成泛函中略去，于是有

$$Z[J_\mu, K^\mu, J, K, U_k, V_l] = \int \mathscr{D}A^\mu\, \mathscr{D}\pi_\mu\, \mathscr{D}\phi\, \mathscr{D}\pi\, \mathscr{D}\mu_k\, \mathscr{D}\omega_l \cdot$$

$$\exp\Big\{i\int d^4x[\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_\mu A^\mu + K^\mu\pi_\mu +$$

$$J\phi + K\pi + U_k\mu_k + V_l\omega_l]\Big\} \tag{6-4-9a}$$

$$\mathscr{L}^{\text{p}} = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi\dot{\phi} - \mathscr{H}_{\text{c}} \tag{6-4-9b}$$

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \mathscr{L}_{\text{m}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \mu_k\Lambda_k + \omega_l\Omega_l \tag{6-4-9c}$$

式中：U_k 和 V_l 分别为乘子场 $\mu_k(x)$ 和 $\omega_l(x)$ 的外源；J_μ 和 J 分别为 A^μ 和 ϕ 的外源；K^μ 和 K 分别为 π_μ 和 π 的外源，并设

$$\phi^\alpha = (A^\mu, \phi, \mu_k, \omega_l)$$

$$\pi_\alpha = (\pi_\mu, \pi)$$

$$J_\alpha = (J_\mu, J, U_k, V_l)$$

$$K^\alpha = (K^\mu, K)$$

于是(6-4-9a)式可写为

$$Z[J_\alpha, K^\alpha] = \int \mathscr{D}\phi^\alpha \mathscr{D}\pi_\alpha \exp\left\{ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_\alpha \phi^\alpha + K^\alpha \pi_\alpha \right] \right\}$$

(6-4-10)

生成泛函(6-4-10)式和 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 在(6-4-8)式变换下不变，(6-4-8)式变换的 Jacobi 行列式为 1，此时相空间中的正则 Ward 恒等式为

$$\left[-\partial_0 \nabla^2 \frac{\delta}{\delta V_1} + \nabla^2 \frac{\delta}{\delta V_2} + mJ - \partial_\mu J^\mu \right] Z[J, K] = 0$$

(6-4-11)

令 $Z[J,K] = \exp\{\mathrm{i}W[J,K]\}$，则(6-4-11)式可化为

$$\left[-\partial_0 \nabla^2 \frac{\delta}{\delta V_1} + \nabla^2 \frac{\delta}{\delta V_2} + mJW^{-1} - \partial_\mu J^\mu W^{-1} \right] W[J, K] = 0 \quad (6\text{-}4\text{-}12)$$

用 Legendre 变换引入顶角的生成泛函分别为

$$\Gamma[\phi^\alpha, \pi_\alpha] = W[J, K] - \int \mathrm{d}^4 x (J_\alpha \phi^\alpha + K^\alpha \pi_\alpha) \quad (6\text{-}4\text{-}13\mathrm{a})$$

$$\frac{\delta W}{\delta J_\alpha(x)} = \phi^\alpha(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi^\alpha(x)} = -J_\alpha(x) \quad (6\text{-}4\text{-}13\mathrm{b})$$

$$\frac{\delta W}{\delta K^\alpha(x)} = \pi_\alpha(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \pi_\alpha(x)} = -K^\alpha(x) \quad (6\text{-}4\text{-}13\mathrm{c})$$

于是相空间中的正则 Ward 恒定式(6-4-11)式化为

$$-\partial_0 \nabla^2 \omega_1(x_1) + \nabla^2 \omega_2(x_1) - m \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(x_1)} + \partial_{x_1}^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x_1)} = 0 \quad (6\text{-}4\text{-}14)$$

将(6-4-14)式关于 $\phi(x_2)$ 求泛函微商，然后让 $A^\mu = \phi = \omega_1 = \omega_2 = 0$，得

$$\frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} = \frac{1}{m} \partial_{x_1}^\mu \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta A^\mu(x_1) \delta \phi(x_2)} \quad (6\text{-}4\text{-}15)$$

将(6-4-14)式关于 $A^\mu(x)$ 求三次泛函微商，然后让所有场为 0，得

$$\partial_{x_1}^{\mu}\frac{\delta^4\Gamma[0]}{\delta A^{\mu}(x_1)\delta A^{\nu}(x_2)\delta A^{\rho}(x_3)\delta A^{\sigma}(x_4)}=$$

$$m\frac{\delta^4\Gamma[0]}{\delta\phi(x_1)\delta A^{\nu}(x_2)\delta A^{\rho}(x_3)\delta A^{\sigma}(x_4)} \tag{6-4-16}$$

将(6-4-14)式关于 $\pi(x)$ 求两次泛函微商，然后让所有场为 0，得

$$\partial_{x_1}^{\mu}\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta A^{\mu}(x_1)\delta\pi(x_2)\delta\pi(x_3)}=$$

$$m\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\phi(x_1)\delta\pi(x_2)\delta\pi(x_3)} \tag{6-4-17}$$

根据由(6-4-3)式，(6-4-17)式也可用位形空间中的变量来表达. 类似地，可由相空间中的正则 Ward 恒等式推导出其他新的关系式.

§6-5 量子色动力学中的应用

色动力学 $SU(3)$ 规范不变 Lagrange 量为[19]

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a+\bar{\psi}[\mathrm{i}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}-\mathrm{i}gB_{\mu}^aT^a)-m]\psi \tag{6-5-1}$$

式中

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}B_{\mu}^a-\partial_{\nu}B_{\nu}^a+gf_{bc}^aB_{\mu}^bB_{\nu}^c \tag{6-5-2}$$

这里 T^a 为 $SU(3)$ 的生成元，$T^a=\lambda^a/2(a=1,2,\cdots,8)$，其中 λ^a 为 Gell-Mann 矩阵；f_{bc}^a 为 $SU(3)$ 的结构常数；ψ、$\bar{\psi}$ 和 B_{μ}^a 的正则动量分别为

$$\pi=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0,\bar{\pi}=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}=0,\pi_a^{\mu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{B}_{\mu}^a}=-F_a^{0\mu} \tag{6-5-3}$$

系统的正则 Hamilton 量

$$H_c=\int\mathrm{d}^3x\mathscr{H}_c=\int\mathrm{d}^3x(\dot{\psi}\pi+\dot{\bar{\psi}}\bar{\pi}+\pi_a^{\mu}\dot{B}_{\mu}^a-\mathscr{L})=$$

$$\int\mathrm{d}^3x\Big[\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a-B_0^a(\mathrm{D}_{bi}^a\pi_b^i-\mathrm{i}g\pi T^a\psi)+$$

$$\frac{1}{4}F_{ij}^aF_a^{ij}+\frac{1}{2}\pi\gamma^0\gamma^i(\partial^i\psi)-\frac{1}{2}(\partial^i\pi)\gamma^0\gamma^i\psi$$

$$-\mathrm{i}g\pi\gamma^0\gamma^i T^a B_i^a\psi - \mathrm{i}m\pi\gamma^0\psi\Big] \tag{6-5-4}$$

式中

$$\mathrm{D}_{b\mu}^a = \delta_b^a\partial_\mu + gf_{bc}^a B_\mu^c \tag{6-5-5}$$

从方程(6-5-3)式得初级约束. 其初级约束为

$$\theta_1 = \pi - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0,\ \theta_2 = \bar{\pi} \approx 0,\ \Lambda_{1a} = \pi_a^0 \approx 0 \tag{6-5-6}$$

总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}} = \int \mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_c + \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \mu^a\Lambda_{1a}) \tag{6-5-7}$$

由 $\theta_i(i=1,2)$的稳定性条件$\{\theta_i,H_T\}\approx 0$,可得出决定 Lagrange 乘子 $\lambda_i(i=1,2)$的方程. 由约束 Λ_{1a}的稳定性条件$\{\pi_a^0,H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$,产生次级约束. 其次级约束为

$$\phi_a^1 = \mathrm{D}_{bi}^a\pi_b^i - \mathrm{i}g\pi T^a\psi \approx 0 \tag{6-5-8}$$

不再给出任何新的约束. 对约束做线性组合:

$$\Lambda_{2a} = \phi_a^1 + \mathrm{i}g\pi T^a(\theta_1\psi + \bar{\psi}\theta_2) \approx 0 \tag{6-5-9}$$

不难验证,约束 Λ_{1a}和 Λ_{2a}为第一类约束,而 θ_1 和 θ_2 为第二类约束.

采用 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化方案. 对每一个第一类约束需选择一个规范条件. 考虑到库仑规范

$$\Omega_2^a = \partial_i B_i^a \approx 0 \tag{6-5-10}$$

由 Ω_2^a 的自洽性 $\partial_0\Omega_2^a\approx 0$,可以给出另外一个规范条件,即

$$\Omega_1^a = \partial_i\pi_i + M^{ab}B_b^0 \approx 0 \tag{6-5-11a}$$

式中

$$M^{ac} = \delta^{ac}\partial^i\partial_i - gf_{bc}^a B_i^b\partial^i \tag{6-5-11b}$$

因子 $\det|\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}|$不依赖于场变量,可从生成泛函(6-3-22)中略去,而

$$\det|\{\Lambda_a,\Omega_b\}| = \det|M_{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})| \tag{6-5-12}$$

因此,依据(6-3-24)、(6-3-25)式,Green 函数的生成泛函可以写为

$$Z[J^{\mu},K_{\mu},\bar{\xi},K,\xi,\bar{K},\bar{\zeta},\zeta,M,X,Y]=$$
$$\int \mathscr{D}B_{\mu}^{a}\,\mathscr{D}\pi_{a}^{\mu}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\pi\,\mathscr{D}\bar{\psi}\,\mathscr{D}\bar{\pi}\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\bar{C}\,\mathscr{D}\mu\,\mathscr{D}\omega\,\mathscr{D}\nu\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_{a}^{\mu}B_{\mu}^{a}+K_{\mu}^{a}\pi_{a}^{\mu}+\bar{\xi}\psi+\pi K+\bar{\psi}\xi+\right.\right.$$
$$\left.\left.\bar{K}\,\bar{\pi}+\bar{\zeta}^{a}C_{a}+\bar{C}_{a}\zeta^{a}+M_{k}\mu_{k}+X_{l}\omega_{l}+Y_{i}\nu_{i}\right]\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}13)$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{m}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \qquad (6\text{-}5\text{-}14\mathrm{a})$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\dot{\psi}\,\pi+\dot{\bar{\psi}}\,\bar{\pi}+\pi_{a}^{\mu}\,\dot{B}_{\mu}^{a}-\mathscr{H}_{c} \qquad (6\text{-}5\text{-}14\mathrm{b})$$

$$\mathscr{L}_{m}=\mu_{k}^{a}\Lambda_{k}^{a}+\omega_{l}^{a}\Omega_{l}^{a}+\nu_{i}\theta_{i} \qquad (6\text{-}5\text{-}14\mathrm{c})$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=\bar{C}_{a}\,M^{ab}C_{b}=-\,\partial^{i}\,\bar{C}_{a}\,\mathrm{D}_{ib}^{a}C_{b} \qquad (6\text{-}5\text{-}14\mathrm{d})$$

其中 μ_{k}^{a}、ω_{l}^{a} 和 ν_{i} 为乘子场. 为简单起见,(6-5-13)式可改写为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\phi^{a}\,\mathscr{D}\pi_{a}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_{a}\phi^{a}+K^{a}\pi_{a})\right\}$$
$$(6\text{-}5\text{-}15)$$

式中:ϕ^{a} 代表场变量,$\phi^{a}=(B_{\mu}^{a},\psi,\bar{\psi},C,\bar{C},\mu,\omega,\nu)$;$\pi_{a}$ 为相应的正则动量,$\pi_{a}=(\pi_{a}^{\mu},\pi,\bar{\pi})$;$J_{a}$ 和 K^{a} 分别为相应于 ϕ^{a} 和 π_{a} 的外源.

这里不去研究生成泛函(6-5-13)式是否可通过对动量积分得到简化,而是直接讨论在正则变量变换下生成泛函的变换性质. 现考虑正则变量的定域无穷小变换:

$$\left.\begin{aligned}
B_{\mu}^{a'}(x) &= B_{\mu}^{a}(x)+\mathrm{D}_{b\mu}^{a}\varepsilon^{b}(x)\\
\pi_{a}^{\mu'}(x) &= \pi_{a}^{\mu}(x)+gf_{ab}^{c}\pi_{c}^{\mu}(x)\varepsilon^{b}(x)\\
\psi'(x) &= \psi(x)+\mathrm{i}gT^{b}\psi(x)\varepsilon^{b}(x)\\
\pi'(x) &= \pi(x)-\mathrm{i}g\pi(x)T^{b}\varepsilon^{b}(x)\\
\bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)-\mathrm{i}g\bar{\psi}(x)T^{b}\varepsilon^{b}(x)\\
\bar{\pi}'(x) &= \bar{\pi}(x)+\mathrm{i}g\bar{\pi}(x)T^{b}\varepsilon^{b}(x)
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}16)$$

并将(6-5-16)式变换的 Jacobian 行列式记为$\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]$. (6-5-14b)式中的 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 在(6-5-16)式变换下是不变的,而

$$\delta(\overline{C}_a M^{ab} C_b) = E_b^i(\overline{C},C)\partial_i \varepsilon^b(x) +$$
$$E_b^0(\overline{C},\partial_i C,B_i)\varepsilon^b(x) \tag{6-5-17a}$$
$$\delta\theta_1 = 0 \tag{6-5-17b}$$
$$\delta\theta_2 = \mathrm{i}g\overline{\pi}T^b\varepsilon^b(x) = \Theta_{2b}(\overline{\pi})\varepsilon^b(x) \tag{6-5-17c}$$
$$\delta\Lambda_{1a} = gf_{bc}^a\pi_c^0\varepsilon^b(x) = \Lambda_{1ab}(\pi^0)\varepsilon^b(x) \tag{6-5-17d}$$
$$\delta\Lambda_{2a} = \Lambda_{2ab}^i(\pi^i)\partial_i\varepsilon^b(x) +$$
$$\Lambda_{2ab}(B_i,\pi^i,\psi,\overline{\psi},\overline{\pi})\varepsilon^b(x) \tag{6-5-17e}$$
$$\delta\Omega_1^a = \Omega_{1b}^{a0}\nabla^2\partial_0\varepsilon^b(x) + \Omega_{1b}^a(B_0)\nabla^2\varepsilon^b(x) +$$
$$\Omega_{1b}^{ai0}(B_i)\partial_i\partial_0\varepsilon^b(x) + \Omega_{1b}^{ai}(\pi^i,\partial_i B_0,B_\mu)\partial_i\varepsilon^b(x) +$$
$$\Omega_{1b}^{a1}(\partial_i\pi^i,\partial_i B_0,B_\mu,\nabla^2 B_o)\varepsilon^b(x) \tag{6-5-17f}$$
$$\delta\Omega_2^a = \Omega_{2b}^a\nabla^2\varepsilon^b(x) + \Omega_{2b}^{ai}(B_i)\partial_i\varepsilon^b(x) +$$
$$\Omega_{2b}^{a0}(\partial_i B_i)\varepsilon^b(x) \tag{6-5-17g}$$

让

$$E_b = E_b^0 - \partial_i E_b^i \tag{6-5-18}$$
$$F_b = \nu_2\Theta_{2b} + \mu_1^a\Lambda_{1ab} + \mu_2^a\Lambda_{2ab} - \partial_i(\mu_2^a\lambda_{2ab}^i) - \partial_o\nabla^2(\omega_1^a\Omega_b^{a0}) +$$
$$\nabla^2(\omega_1^a\Omega_{1b}^a) + \partial_0\partial_i(\omega_1^a\Omega_{1b}^{ai0}) - \partial_i(\omega_1^a\Omega_{1b}^{ai}) + \omega_1^a\Omega_{1b}^{a1} +$$
$$\nabla^2(\omega_2^a\Omega_{2b}^a) - \partial_i(\omega_2^a\Omega_{2b}^{ai}) + \omega_2^a\Omega_{2b}^{a0} \tag{6-5-19}$$

生成泛函(6-5-15)式在(6-5-16)式变换下的不变性表明

$$\left.\frac{\delta Z}{\delta\varepsilon^b(x)}\right|_{\varepsilon^b=0} = 0 \tag{6-5-20a}$$

于是有

$$\left(\frac{\delta\overline{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^b}\right)_{\varepsilon^b=0} Z[J,K] + \int\mathscr{D}\phi^a\,\mathscr{D}\pi_a[E_b + F_b -$$
$$\partial_\mu J_b^\mu + gf_{bc}^a B_\mu^c J_a^\mu + gf_{ab}^c\pi_c^\mu K_\mu^a + \mathrm{i}g\overline{\xi}T^b\psi -$$
$$\mathrm{i}g\pi T^b K - \mathrm{i}g\overline{\psi}T^b\xi + \mathrm{i}g\overline{K}T^b\overline{\pi}]\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a\phi^a + K^a\pi^a]\right\} = 0 \tag{6-5-20b}$$

或者

$$\left[\left(\frac{\delta \bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^b}\right)_{\varepsilon^b=0} + E_b + F_b - \partial_\mu J_b^\mu + g f_{bc}^a J_a^\mu \frac{\delta}{\delta J_c^\mu} + g f_{ab}^c K_\mu^a \frac{\delta}{\delta K_\mu^c} + \mathrm{i}g\bar{\xi}T^b \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}} - \mathrm{i}gKT^b\frac{\delta}{\delta K} - \mathrm{i}g\xi T^b \frac{\delta}{\delta\xi} + \mathrm{i}g\bar{K}T^b \frac{\delta}{\delta\bar{K}}\right] Z[J,K] = 0 \tag{6-5-21}$$

这里 E_b 依赖于鬼场 C_a 和 $\bar{C}_a$，但 F_b 依赖于乘子场.

和通常一样，让 $Z[J,K]=\exp\{\mathrm{i}W[J,K]\}$. 根据顶角生成泛函的定义，可以通过泛函 Legendre 变换得到，

$$\Gamma[\phi^a,\pi_a] = W[J,K] - \int \mathrm{d}^4x(J_a\phi^a + K^a\pi_a) \tag{6-5-22}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta W}{\delta J_a(x)} = \phi^a(x), \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^a(x)} = -J_a(x) \\ &\frac{\delta W}{\delta K^a(x)} = \pi_a(x), \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\pi_a(x)} = -K^a(x) \end{aligned}\right\} \tag{6-5-23}$$

这时(6-5-21)式也可以写为

$$\left(\frac{\delta \bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^b}\right)_{\varepsilon^b=0} + E_b + F_b + \partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta B_\mu^b} - g f_{bc}^a B_\mu^a \frac{\delta\Gamma}{\delta B_\mu^c} - g f_{bc}^a \pi_a^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta\pi_c^\mu} - \mathrm{i}g\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}T^b\psi + \mathrm{i}g\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi}T^b\pi + \mathrm{i}g\bar{\psi}T^b\frac{\delta\Gamma}{\partial\bar{\psi}} - \mathrm{i}g\bar{\pi}T^b\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\pi}} = 0 \tag{6-5-24}$$

对方程(6-5-24)式关于 $\psi_k(x_2)$ 和 $\bar{\psi}_l(x_3)$ 求泛函微商，并让所有场为 0(包括乘子场)，即 $\phi^a=\pi_a=0$，可得

$$\partial_{x_1}^\mu \left.\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}_l(x_3)\delta\psi_k(x_2)\delta B_b^\mu(x_1)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} = g(T^b)_{k\lambda}\delta(x_1-x_2)\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}_l(x_3)\delta\psi_\lambda(x_1)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} - g(T^b)_{l\lambda}\delta(x_1-x_3)\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}_\lambda(x_3)\delta\psi_k(x_2)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} \tag{6-5-25}$$

对方程(6-5-24)式关于 $B_\nu^a(x_2)$ 和 $B_\lambda^c(x_3)$ 求泛函微商，并让 $\phi^a=$

$\pi^a=0$，可得

$$\partial_{x_1}^{\mu}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta B_c^{\lambda}(x_3)\delta B_a^{\nu}(x_2)\delta B_b^{\mu}(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi_a=0}=$$

$$gf_{b\sigma}^{a}\delta(x_1-x_2)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta B_c^{\lambda}(x_3)\delta B_{\sigma}^{\nu}(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi_a=0}+$$

$$gf_{b\sigma}^{c}\delta(x_1-x_3)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta B_a^{\nu}(x_2)\delta B_{\sigma}^{\lambda}(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi_a=0}\qquad(6\text{-}5\text{-}26)$$

(6-5-25)、(6-5-26)式表明了传播子和正规顶角间存在的关系. 通过 Fourier 变换把方程(6-5-25)、(6-5-26)式转移到动量表象，可得到传播子和正规顶角在动量空间中的相应关系式.

对(6-5-24)式关于 $\pi_a^{\nu}(x_2)$和 $\pi_c^{\lambda}(x_3)$求泛函微商，并让 $\phi_a=\pi_a=0$，可得

$$\partial_{x_1}^{\mu}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta \pi_c^{\lambda}(x_3)\delta \pi_a^{\nu}(x_2)\delta B_b^{\mu}(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi^a=0}=$$

$$gf_{b\sigma}^{a}\delta(x_1-x_2)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta \pi_c^{\lambda}(x_3)\delta \pi_{\sigma}^{\nu}(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi_a=0}+$$

$$gf_{b\sigma}^{c}\delta(x_1-x_3)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta \pi_a^{\nu}(x_2)\delta \pi_{\sigma}^{\lambda}(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi_a=0}\qquad(6\text{-}5\text{-}27)$$

相空间中的传播子在文献[14]中有讨论. 方程(6-5-27)式表明了关于 π 的传播子应当满足的关系. 类似地，对方程(6-5-24)式关于场变量求多次泛函微商，可得到正规顶角在相空间中的多种形式的正则 Ward 恒等式.

在(6-5-16)式变换下，没有考虑鬼场 $C_a(x)$和 $\bar{C}_a(x)$的变化. 若规范场和鬼场的变换都考虑，就可以得到更一般的规范场-鬼场的正规顶角.

为了下面的应用，先列出由 Fermi 场 $\psi(x)$构成的 $SU(3)$矢量流、轴矢流、标量流和赝标量流，即

$$\left.\begin{aligned}&V_{\mu}^{a}(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}T^{a}\psi(x),A_{\mu}^{a}(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\gamma_5T^{a}\psi(x)\\&S^{a}(x)=\bar{\psi}(x)T^{a}\psi(x),P^{a}(x)=\mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma_5T^{a}\psi(x)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}5\text{-}28)$$

分别对上述流引进外源 $v_a^\mu(x)$、$a_a^\mu(x)$、$s_a(x)$和 $p_a(x)$，可得到扩展的生成泛函，即

$$Z[J,K,v,a,s,p]=$$
$$\int\mathscr{D}\phi^a\mathscr{D}\pi_a\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_a\phi^a+K^a\pi_a+\right.\right.$$
$$\left.\left.v_a^\mu V_\mu^a+a_a^\mu A_\mu^a+s_aS^a+p_aP^a\right]\right\}\qquad(6\text{-}5\text{-}29)$$

在手征变换

$$\left.\begin{aligned}\psi'(x)&=(1+\varepsilon^a(x)\gamma_5T^a)\psi(x)\\ \pi'(x)&=\pi(x)(1-\mathrm{i}\varepsilon^a(x)\gamma_5T^a)\\ \bar{\psi}'(x)&=\bar{\psi}(x)(1+\mathrm{i}\varepsilon^a(x)\gamma_5T^a)\\ \bar{\pi}'(x)&=1-\mathrm{i}\varepsilon^a(x)\bar{\pi}(x)\gamma_5T^a\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}5\text{-}30)$$

下，正则作用量的改变

$$\delta I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\,\varepsilon^a(x)(\partial^\mu A_\mu^a-2mP^a-gf_{bc}^aA_\mu^bB^{c\mu})\qquad(6\text{-}5\text{-}31)$$

(6-5-30)式变换下的 Jacobian 行列式为 1. 由于

$$\delta\theta_2=-\mathrm{i}\varepsilon^a(x)\theta_2\gamma_5T^a$$

生成泛函(6-5-29)式在(5-4-31)式变换下的不变性表明

$$\int\mathscr{D}\phi^a\mathscr{D}\pi_a[\partial^\mu A_\mu^a-2mP^a-gf_{bc}^aA_\mu^bB^{c\mu}-\mathrm{i}\nu_2\theta_2\gamma_5T^a+$$
$$\mathrm{i}\xi\gamma_5T^a\psi-\mathrm{i}\pi\gamma_5T^aK+\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_5T^a\xi-\mathrm{i}\bar{K}\gamma_5T^a\bar{\pi}+v_\mu^bf_{bc}^aA^{c\mu}+$$
$$a_\mu^bf_{bc}^aV^{c\mu}-s^bd_{bc}^aP^c+p^bd_{bc}^aS^c]\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_a\phi^a+\right.$$
$$\left.K^a\pi_a+v_a^\mu V_\mu^a+a_a^\mu A_\mu^a+s_aS^a+p_aP^a]\right\}=0\qquad(6\text{-}5\text{-}32)$$

让所有的外源为 0(且 $\theta_2\approx0$)，则有

$$\langle0|[\partial^\mu\hat{A}_\mu^a(x)-2m\hat{P}^a(x)-$$
$$gf_{bc}^a\hat{A}_\mu^b(x)\hat{B}^{c\mu}(x)]|0\rangle=0\qquad(6\text{-}5\text{-}33)$$

这就是轴矢流部分守恒(PCAC)的表达式.对方程(6-5-32)式关于$v_{\nu}^{b}(y)$和$v_{\lambda}^{c}(z)$求微商,并让所有外源为0,可得

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T^{*}[(\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}^{a}(x)-2m\hat{P}^{a}(x)-\\
&gf_{de}^{a}\hat{A}_{\mu}^{d}(x)\hat{B}^{e\mu}(x))\hat{V}_{\nu}^{b}(y)\hat{V}_{\lambda}^{c}(z)]|0\rangle=\\
&\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y)[f_{be}^{a}\langle 0|T[\hat{A}_{\nu}^{e}(x)\hat{V}_{\lambda}^{c}(y)]|0\rangle]+\\
&\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-z)[f_{ce}^{a}\langle 0|T[\hat{A}_{\lambda}^{e}(x)\hat{V}_{\nu}^{b}(y)]|0\rangle]
\end{aligned}
\tag{6-5-34}
$$

(6-5-34)式为AVV顶角的轴矢Ward恒等式.当(6-5-33)、(6-5-34)式中$f_{bc}^{a}=0$时,其结果在文献[2]中已给出.在文献[2]中所用的Lagrange量虽不是规范不变的,但是奇异的.在相空间存在一些固有约束.在文献[2]中,作者在推导Ward恒等式时,没有计入约束,这里从另一个角度作了补充讨论.

众所周知,在杨-Mills理论的BRS变换其中关于鬼场的变换是非线性的.这里将找出一个非定域线性变换,在此变换下使系统的$\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}(x)$不变,从而可推导出正规顶角的新的Ward恒等式[8].

显然,在

$$
\left.
\begin{aligned}
C^{a\prime}&=C^{a}+\mathrm{i}g(T^{\sigma})_{ab}\varepsilon^{\sigma}(x)C^{b}\\
A_{\mu}^{a\prime}&=A_{\mu}^{a}+\mathrm{D}_{\sigma\mu}^{a}\varepsilon^{\sigma}(x)
\end{aligned}
\right\}
\tag{6-5-35}
$$

变换下,$\mathrm{D}_{b\mu}^{a}C^{b}$的变更为

$$
\mathrm{D}_{b\mu}^{a}{}'C^{b}=\mathrm{D}_{b\mu}^{a}C^{b}+\mathrm{i}g(T^{\sigma})_{ab}\varepsilon^{\sigma}(x)\mathrm{D}_{e\mu}^{b}C^{e}
\tag{6-5-36}
$$

因此,如果进一步考虑$\bar{C}^{a}$按

$$
\partial^{\mu}\bar{C}^{a\prime}=\partial^{\mu}\bar{C}^{a}-\mathrm{i}g\partial^{\mu}\bar{C}^{b}(T^{\sigma})_{ba}\varepsilon^{\sigma}(x)
\tag{6-5-37}
$$

变换,那么$\partial^{\mu}\bar{C}^{a}\mathrm{D}_{b\mu}^{a}C^{b}$在(6-3-35)、(6-3-37)式变换下是不变的,也就是说,$\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}(x)$在下列非定域变换下保持不变,即

$$
C^{a\prime}(x)=C^{a}(x)+\mathrm{i}g(T^{\sigma})_{ab}\varepsilon^{\sigma}(x)C^{b}(x)
\tag{6-5-38a}
$$

$$\bar{C}^{a\prime}(x)=\bar{C}^{a}(x)-\mathrm{i}g\bar{C}^{b}(x)(T^{\sigma})_{ba}\varepsilon^{\sigma}(x)+\frac{\mathrm{i}g}{\Box}\partial_{\mu}[\bar{C}^{b}(T^{\sigma})_{ba}\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)] \tag{6-5-38b}$$

$$A_{\mu}^{a\prime}(x)=A_{\mu}^{a}(x)+\mathrm{D}_{\sigma\mu}^{a}\varepsilon^{\sigma}(x) \tag{6-5-38c}$$

式中$\Box=\partial^{\mu}\partial_{\mu}$. (6-5-38b)式又可写为

$$\bar{C}^{a\prime}(x)=\bar{C}^{a}(x)-\mathrm{i}g\bar{C}^{b}(x)(T^{\sigma})_{ba}\varepsilon^{\sigma}(x)+g\int\mathrm{d}^{4}y\Delta_{0}(x,y)\partial_{\mu}[\bar{C}^{b}(y)(T^{\sigma})_{ba}\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(y)] \tag{6-5-39}$$

其中

$$\Box\Delta_{0}(x,y)=\mathrm{i}\delta^{4}(x-y) \tag{6-5-40}$$

可见,(6-5-38)式的变换为线性非定域变换.

现考虑与(6-5-38)式相应的相空间变量的变换:

$$\left.\begin{aligned}
\psi'(x)&=\psi(x)+\mathrm{i}g\varepsilon^{\sigma}(x)T^{\sigma}\psi(x)\\
\pi'(x)&=\pi(x)-\mathrm{i}g\pi(x)\varepsilon^{\sigma}(x)T^{\sigma}\\
\bar{\psi}'(x)&=\bar{\psi}(x)-\mathrm{i}g\bar{\psi}(x)\varepsilon^{\sigma}(x)T^{\sigma}\\
\bar{\pi}'(x)&=\bar{\pi}(x)+\mathrm{i}g\varepsilon^{\sigma}(x)\bar{\pi}(x)T^{\sigma}\\
A_{\mu}^{a\prime}&=A_{\mu}^{a}(x)+\mathrm{D}_{\sigma\mu}^{a}\varepsilon^{\sigma}(x)\\
\pi_{a}^{\mu\prime}(x)&=\pi_{a}^{\mu}(x)+gf_{\sigma c}^{a}\pi_{c}^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)\\
C^{a\prime}(x)&=C^{a}(x)+\mathrm{i}g(T^{\sigma})_{ab}\varepsilon^{\sigma}(x)C^{b}(x)\\
\bar{C}^{a\prime}(x)&=\bar{C}^{a}(x)-\mathrm{i}g\bar{C}^{b}(x)(T^{\sigma})_{ba}\varepsilon^{\sigma}(x)+\\
&\quad\frac{\mathrm{i}g}{\Box}\partial_{\mu}[\bar{C}^{b}(x)(T^{\sigma})_{ba}\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)]
\end{aligned}\right\} \tag{6-5-41}$$

在(6-5-41)式变换下,$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}(x)+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}(x)$是不变的,而$\mathscr{L}_{m}$在(6-5-41)式变换下的变更为

$$\delta\mathscr{L}_{m}\doteq F_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \tag{6-5-42}$$

式中

$$F_{\sigma}=\nu_{2}\theta_{2\sigma}+\mu_{1}^{a}\Lambda_{1\sigma}^{a}+\mu_{2}^{a}\Lambda_{2\sigma}^{a}-\partial_{i}(\mu_{2}^{a}\Lambda_{2\sigma}^{ai})-\partial_{0}\nabla^{2}(\omega_{1}^{a}\Omega_{\sigma}^{a0})+\nabla^{2}(\omega_{1}^{a}\Omega_{1\sigma}^{a})+\partial_{0}\partial_{i}(\omega_{1}^{a}\Omega_{1\sigma}^{ai0})-\partial_{i}(\omega_{1}^{a}\Omega_{1\sigma}^{ai})+\omega_{1}^{a}\Omega_{1\sigma}^{a1}+$$

$$\nabla^2(\omega_2^a \Omega_{2\sigma}^a) - \partial_i(\omega_2^a \Omega_{2\sigma}^{ai}) + \omega_2^a \Omega_{2\sigma}^{a0} \qquad (6\text{-}5\text{-}43)$$

其中 $\theta_{2\sigma}$、$\Lambda_{i\sigma}^{\sigma}$、$\Omega_{i\sigma}^{a}$等均为正则变量及其微商的函数. 根据生成泛函(6-5-13)式在(6-5-41)式变换下的不变性，Ward 恒等式为

$$\Big\{ \mathrm{i}F_\sigma + \mathrm{i}g\bar{\xi}T^\sigma \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}} - \mathrm{i}gKT^\sigma \frac{\delta}{\delta K} - \mathrm{i}g\xi T^\sigma \frac{\delta}{\delta \xi} +$$

$$\mathrm{i}g\bar{K}T^\sigma \frac{\delta}{\delta \bar{K}} - \mathrm{i}\partial_\mu J_\sigma^\mu + gf_{\sigma c}^a J_a^\mu \frac{\delta}{\delta J_c^\mu} +$$

$$gf_{\sigma c}^a K_\mu^a \frac{\delta}{\delta K_\mu^c} + \mathrm{i}g\bar{\zeta}_a (T^\sigma)_{ab} \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_b} - \mathrm{i}g\zeta_a (T^\sigma)_{ba} \frac{\delta}{\delta \zeta_b} +$$

$$\mathrm{i}g\partial^\mu \Big[\partial_\mu \Big(\zeta_a \frac{1}{\Box} \Big) (T^\sigma)_{ba} \frac{\delta}{\delta \zeta_b} \Big] \Big\} Z[J,K] = 0 \qquad (6\text{-}5\text{-}44)$$

让 $Z[J,K]=\exp(\mathrm{i}W[J,K])$，并施行泛函 Legendre 变换

$$\Gamma[\phi,\pi] = W[J,K] - \int \mathrm{d}^4 x (J\phi + K\pi) \qquad (6\text{-}5\text{-}45)$$

于是(6-5-44)式可化为

$$\mathrm{i}F_\sigma - \mathrm{i}g \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} T^\sigma \psi + \mathrm{i}g\pi T^\sigma \frac{\delta \Gamma}{\delta \pi} + \mathrm{i}g\bar{\psi} T^\sigma \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} - \mathrm{i}g\bar{\pi} T^\sigma \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\pi}} +$$

$$\mathrm{i}\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta B_\mu^\sigma} - gf_{\sigma c}^a B_\mu^c \frac{\delta \Gamma}{\delta B_\mu^a} - gf_{\sigma c}^a \pi_c^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta \pi_a^\mu} - \mathrm{i}gC^a (T^\sigma)_{ab} \frac{\delta \Gamma}{\delta C^b} +$$

$$\mathrm{i}g\bar{C}^a (T^\sigma)_{ba} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^b} - \mathrm{i}g\partial^\mu \Big[\partial_\mu \Big(\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^a} \frac{1}{\Box} \Big) (T^\sigma)_{ba} \bar{C}^b \Big] = 0 \qquad (6\text{-}5\text{-}46)$$

对(6-5-46)式关于 $B_\nu(x_2)$和 $B_\lambda^b(x_3)$求泛函微商，并让所有场(包括乘子场)为 0，可得

$$\partial_\mu^x \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\partial B_\mu^\sigma(x) \delta B_\nu^a(x_2) \delta B_\lambda^b(x_3)} =$$

$$\mathrm{i}gf_{\sigma a}^\rho \delta(x - x_2) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta B_\nu^\rho(x) \delta B_\lambda^b(x_3)} \qquad (6\text{-}5\text{-}47)$$

对(6-5-46)式关于 $C^e(x_2)$和 $\bar{C}^f(x_3)$求泛函微商，并让所有场为 0，可得

$$(T^\sigma)_{eb} \delta(x_1 - x_2) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^f(x_3) \delta C^b(x_1)} -$$

$$(T^{\sigma})_{fb}\delta(x_1 - x_3)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^b(x_1)\delta C^e(x_2)} +$$

$$\partial^{\mu}_{x_1}\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^f(x_3)\delta C^e(x_2)\delta B^{\mu}_{\sigma}(x_1)} +$$

$$\partial^{\mu}\left[\partial_{\mu}\left(\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^a(x_1)\delta C^e(x_2)}\frac{1}{\Box}\right)(T^{\sigma})_{af}\delta(x_1 - x_3)\right] = 0 \quad (6\text{-}5\text{-}48)$$

这样由正则 Ward 恒等式导出了顶角间的关系式，其显著优点在于不必要作出相空间路径积分中关于动量的积分.(6-5-48)式是规范场-鬼场正规顶角的 Ward 恒等式的新形式，它有别于由 BRS 不变性导出的通常的 Ward-Takahashi 恒等式. 此外，为了导出(6-5-48)式，这里仅要求 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$在非定域(6-5-41)式变换下不变，而$\mathscr{L}_m$可以是变更的，这也与通常要求的 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$在 BRS 变换下不变不同.

§6-6 广义正则 Ward 恒等式

在动力系统的路径积分(泛函积分)量子理论中，从 Green 函数的生成泛函导出理论的 Feynman 规则和 Ward 恒等式，通常是用位形空间中的 Lagrange 量(或有效 Lagrange 量)来表述的，它仅适用于相空间中生成泛函对正则动量的路径积分为 Gauss 型的情况. 当对动量的路径积分不能积出或积分十分困难(特别是约束 Hamilton 系统)时，定域变换下的相空间 Ward 恒等式有重要意义[8,19,23]. 本节不仅研究了相空间 Ward 恒等式的推广，还研究了 ϕ^4 场论的 Lagrange 量添加一个四维散度项后，其系统的量子 Green 函数的变化，同时讨论了相应的 Feynman 规则.

一个用奇异 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu})(\varphi^a_{,\mu}=\partial\varphi^a/\partial x^{\mu})$描述的系统，在相空间中存在固有约束，为约束 Hamilton 系统. 设 $\Lambda_k\approx 0$ $(k=1,2,\cdots,K_1)$为系统的第一类约束；$\theta_i\approx 0(i=1,2,\cdots,I_1)$为第二类约束；与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k\approx 0(k=1,2,\cdots,$

K_1). 对正则变量均引入外源，则相空间中 Green 函数的生成泛函

$$
\begin{aligned}
&Z[J,K,L,M,N] = \\
&\int \mathscr{D}\varphi^a \mathscr{D}\pi_a \mathscr{D}\lambda_m \mathscr{D}C^a \mathscr{D}p_a \mathscr{D}\overline{C}^a \mathscr{D}\overline{p}_a \cdot \\
&\exp\left\{ \mathrm{i}\left[I_{\text{eff}}^{\text{p}} + \int \mathrm{d}^4x (J_a\varphi^a + K^a\pi_a + L^m\lambda_m + \right.\right. \\
&\left.\left. \overline{M}_a C^a + \overline{C}^a M_a + \overline{N}^a p_a + \overline{p}_a N^a) \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{6-6-1a}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
I_{\text{eff}}^{\text{p}} = &\int \mathrm{d}^4x \mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \\
&\int \mathrm{d}^4x \Big\{ \pi_a \dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c + \lambda_k \Lambda_k + \lambda_l \Omega_l + \lambda_i \theta_i + \\
&\int \mathrm{d}^4y \Big[\overline{C}_k(x) \{\Lambda_k(x), \Omega_l(y)\} C_l(y) + \\
&\frac{1}{2} \overline{C}_i(x) \{\theta_i(x), \theta_j(y)\} C_j(y) \Big] \Big\}
\end{aligned}
\tag{6-6-1b}
$$

而 $\lambda_m = (\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)$ 为乘子场，p_a 和 $\overline{p}_a$ 为鬼场 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的正则动量. 为简化记号，令

$$
\begin{aligned}
&\phi = (\varphi^a, \lambda_m, C^a, \overline{C}^a) \\
&\pi = (\pi_a, p_a, \overline{p}_a) \\
&J = (J_a, L^m, M_a, \overline{M}_a) \\
&K = (K^a, N^a, \overline{N}^a) \\
&I_{\text{eff}}^{\text{p}} = I^{\text{p}}
\end{aligned}
$$

于是(6-6-1a)式可写为

$$
\begin{aligned}
Z[J,K] = &\mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J,K]} = \\
&\int \mathscr{D}\phi \, \mathscr{D}\pi \exp\left\{ \mathrm{i}\left[I^{\text{p}} + \int \mathrm{d}^4x (J\phi + K\pi) \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{6-6-2}
$$

对于非奇异(正规)Lagrange 量系统，$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \pi_a \dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c$.

设 $F(\phi,\pi)$ 是正则变量的给定泛函．当泛函积分

$$
Z_F[J,K] = \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\pi F(\phi,\pi) \cdot
$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J\phi+K\pi)\right]\right\} \tag{6-6-3}$$

在 $J=K=0$ 时,恰为 $\hat{F}(\hat{\varphi},\hat{\pi})$ 的期望值[12]. (6-6-3)式在下列变量的变换

$$\left.\begin{aligned}\phi(x)\to\phi'(x)&=\phi(x)+\delta\phi(x)=\phi(x)+S_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\ \pi(x)\to\pi'(x)&=\pi(x)+\delta\pi(x)=\pi(x)+T_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\end{aligned}\right\} \tag{6-6-4}$$

下是不变的. 式中:S_σ 和 T_σ 为线性微分算符;$\varepsilon^\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数,它们及其微商在四维时空区域的边界上为 0. 在(6-6-4)式变换下,I^{p} 的变分为

$$\delta I^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\delta\phi+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\delta\pi+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi\delta\phi)\right] \tag{6-6-5a}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}=-\dot{\pi}-\frac{\delta H}{\delta\phi},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}=\dot{\phi}-\frac{\delta H}{\delta\pi} \tag{6-6-5b}$$

假设(6-6-4)式变换的 Jacobi 行列式为 1. 根据 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件,泛函积分(6-6-3)式在(6-6-4)式变换下不变,就得相空间中广义正则 Ward 恒等式[24],即

$$\begin{aligned}\Big[\widetilde{S}_\sigma\left(\frac{\delta F}{\delta\phi}\right)+\widetilde{T}_\sigma\left(\frac{\delta F}{\delta\pi}\right)+\mathrm{i}\widetilde{S}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\right)+\mathrm{i}\widetilde{T}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)+\\ \mathrm{i}\widetilde{S}_\sigma(FJ)+\mathrm{i}\widetilde{T}_\sigma(FK)\Big]_{\substack{\phi\to\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J}\\ \pi\to\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta K}}} Z_F[J,K]=0\end{aligned} \tag{6-6-6}$$

式中 $\widetilde{S}_\sigma$ 和 $\widetilde{T}_\sigma$ 分别为 S_σ 和 T_σ 的伴随算符[3]. 当 $F=1$ 时,(6-6-6)式为相空间中的正则 Ward 恒等式. 如果取 $F=\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$,考虑正则变量的平移变换,由(6-6-6)式可导出场的 Green 函数之间的关系. 设 $F(\phi,\pi)$ 在(6-5-4)式变换下不变,则相空间中广义正则 Ward 恒等式为

$$\Big[\widetilde{S}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\right)+\widetilde{T}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)+\widetilde{S}_\sigma(FJ)+$$

$$\widetilde{T}_\sigma(FK)\Big]_{\substack{\phi\to\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\\ \pi\to\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta K}}} Z_F[J,K]=0 \tag{6-6-7}$$

现考虑增广相空间中一般形式的无穷小定域变换：

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + R^\mu_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \\ \phi'(x') &= \phi(x) + \Delta\phi(x) = \phi(x) + S_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \\ \pi(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + T_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \end{aligned}\right\} \tag{6-6-8}$$

式中：$\varepsilon^\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意函数；$\varepsilon^\sigma(x)$及其所需的各级微商的值在时空区域边界上为 0；$R^\mu_\sigma$、$S_\sigma$ 和 T_σ 为线性微分算符，且

$$\left.\begin{aligned} &R^\mu_\sigma = A^{\mu\nu(k)}_\sigma \partial_{\nu(k)}, \quad S_\sigma = B^{\nu(l)}_\sigma \partial_{\nu(l)} \\ &T_\sigma = C^{\nu(m)}_\sigma \partial_{\nu(m)} \\ &\nu(n) = \underbrace{\nu\mu\cdots\lambda\rho}_{n}, \quad \partial_{\nu(n)} = \underbrace{\partial_\nu\partial_\mu\cdots\partial_\lambda\partial_\rho}_{n} \end{aligned}\right\} \tag{6-6-9}$$

式中 A、B、C 均为 x、ϕ、π 的函数，并将(6-6-8)式变换的 Jacobi 行列式记为$\overline{J}[\phi,\pi,\varepsilon]$. 泛函积分(6-6-3)式在(6-6-8)式变换下的不变性表明

$$\left.\frac{\delta Z_F}{\delta\varepsilon^\sigma(x)}\right|_{\varepsilon^\sigma(x)=0} = 0 \tag{6-6-10}$$

将(6-6-8)式代入(6-6-3)式，准确到一级小量，并注意到(6-3-19)式，对相关的项做分部积分，利用 $\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件，可得相空间中的广义正则 Ward 恒等式[25]，即

$$\begin{aligned} \Big[\overline{J}_0 &+ \widetilde{S}_\sigma\left(\frac{\delta F}{\delta\phi}\right) - \widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\phi_{,\mu}\frac{\delta F}{\delta\phi}\right) + \widetilde{T}_\sigma\left(\frac{\delta F}{\delta\pi}\right) - \widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\pi_{,\mu}\frac{\delta F}{\delta\pi}\right) + \\ &\mathrm{i}\widetilde{S}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\right) - \mathrm{i}\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\phi_{,\mu}F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\right) + \mathrm{i}\widetilde{T}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right) - \\ &\mathrm{i}\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\pi_{,\mu}F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right) + \mathrm{i}\widetilde{S}_\sigma(FJ) - \mathrm{i}\widetilde{R}^\mu_\sigma(\phi_{,\mu}FJ) + \mathrm{i}\widetilde{T}_\sigma(FK) - \\ &\mathrm{i}\widetilde{R}^\mu_\sigma(\pi_{,\mu}FK)\Big]\Big|_{\substack{\phi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\\ \pi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}}} Z_F[J,K] = 0 \end{aligned} \tag{6-6-11}$$

式中

$$\bar{J}_0 = \frac{\delta \bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^\sigma(x)}\bigg|_{\varepsilon^\sigma(x)=0} \qquad (6\text{-}6\text{-}12)$$

$\widetilde{R}^\mu_\sigma$、$\widetilde{S}_\sigma$、$\widetilde{T}_\sigma$ 分别为 R^μ_σ、S_σ、T_σ 的伴随算符[3]. 在导出(6-6-11)式时使用了 $J[\phi,\pi,0]=1$ 的条件.

回到(6-6-2)式利用泛函 Legendre 变换，引入顶角生成泛函 $\Gamma[\phi,\pi]$，有

$$\Gamma[\phi,\pi] = W[J,K] - \int \mathrm{d}^4x[J(x)\phi(x) + K(x)\pi(x)] \qquad (6\text{-}6\text{-}13a)$$

$$\phi(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)},\ J(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)} \qquad (6\text{-}6\text{-}13b)$$

$$\pi(x) = \frac{\delta W}{\delta K(x)},\ K(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi(x)} \qquad (6\text{-}6\text{-}13c)$$

将(6-6-2)式右端的指数因子在$(\phi_0(x),\pi_0(x))$邻域展开，有

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4(x)[\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathscr{H}(x) + J(x)\phi(x) + K(x)\pi(x)] = \\
&\int \mathrm{d}^4x[\pi_0(x)\dot{\phi}_0(x) - \mathscr{H}_0(x) + J(x)\phi_0(x) + K(x)\pi_0(x) + \\
&\int \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\delta I^\mathrm{P}}{\delta\phi(x)} + J(x)\right][\phi(x) - \phi_0(x)]\right\} + \\
&\left[\frac{\delta I^\mathrm{P}}{\delta\pi(x)} + K(x)\right][\pi(x) - \pi_0(x)] + \\
&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\frac{\delta^2 I^\mathrm{P}}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}[\phi(x) - \phi_0(x)]\cdot \\
&[\phi(y) - \phi_0(y)] + \cdots
\end{aligned} \qquad (6\text{-}6\text{-}14)$$

采用最陡下降法，取展开点$(\phi_0(x),\pi_0(x))$适合

$$\frac{\delta I^\mathrm{P}}{\delta\phi(x)} + J(x) = 0,\ \frac{\delta I^\mathrm{P}}{\delta\pi(x)} + K(x) = 0 \qquad (6\text{-}6\text{-}15)$$

由(6-6-13a)、(6-6-14)式可得，在树图近似下顶角的生成泛函等于

正则作用量，即 $\Gamma[\phi_0,\pi_0]=I^{\mathrm{P}}[\phi_0,\pi_0]$. 从而，不必要作出相空间生成泛函对正则动量的路径积分，就可求出树图近似下的各次顶角，并导出相应的 Feynman 规则.

众所周知，对系统的 Lagrange 量添加一个四维散度项，不会改变系统的经典运动方程. 在量子水平上对系统是否有影响，近来从高阶微商理论角度作了探讨[26,27]. 这里讨论 ϕ^4 场论的 Lagrange 量添加一个四维散度项后，仍为一阶微商的情形. 考虑

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\phi+m^2\varphi^2)-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4-a_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi \tag{6-6-16}$$

式中 a_μ 为常矢，且 $a_\mu=(1,0,0,0)$. $\varphi(x)$的正则动量为 $\pi(x)$，且

$$\pi(x)=\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{\varphi}(x)}=\dot{\varphi}(x)-\varphi(x) \tag{6-6-17}$$

正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c(x)=\pi(x)\dot{\varphi}(x)-\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}\pi^2(x)+\frac{1}{2}\nabla\varphi(x)\cdot\nabla\varphi(x)+\frac{1}{2}(m^2+1)\varphi^2(x)+\varphi(x)\pi(x)+\frac{\lambda}{4!}\varphi^4+a_k\varphi(x)\partial_k\varphi(x) \tag{6-6-18}$$

正则作用量

$$I^{\mathrm{P}}=\int\mathrm{d}^4x[\pi(x)\dot{\varphi}(x)-\mathscr{H}_c]=\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{2}[\pi^2(x)-\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi-(m^2+1)\varphi^2(x)]-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4(x)-a_k\varphi(x)\partial_k\varphi(x)\right\} \tag{6-6-19}$$

树图近似下两点正规顶角为

$$\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\pi=0}=\left.\frac{\delta^2I^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\pi=0}=$$

$$\int d^4z d^2w \frac{\delta}{\delta\pi(w)}\left(\frac{\delta I^p}{\delta\pi(z)}\frac{\delta\pi(z)}{\delta\varphi(x)}\right)\frac{\delta\pi(w)}{\delta\varphi(y)}\bigg|_{\varphi=\pi=0}+$$

$$\frac{\delta^2 I^p}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\bigg|_{\varphi=\pi=0}=$$

$$-[\partial^2+a_\mu\partial_\mu+(m^2+1)]\delta(x-y) \qquad (6\text{-}6\text{-}20)$$

可见，其结果与通常 φ^4 场论不同，因而场的传播子发生变化. 不难验证，添加上述四维散度项后，最低次(四次)顶角不变.

§6-7 非定域变换

在共形场[28,29]和杨-Mills 场[30]量子理论中研究过非定域变换. 在非 Abel 规范理论中，讨论正规顶角所满足的某些关系，只需考虑变换保持原始 Lagrange 量和鬼场 Lagrange 量不变就够了[30]. 文献[30]是用位形空间中生成泛函来表述的，它只适用于相空间路径积分对动量可积的情况，这里讨论一般情形. 从相空间中 Green 函数的生成泛函出发，考虑增广相空间中一般的非定域变换，导出相应的正则形式的 Ward 恒等式. 用于非 Abel 规范理论，不必要作出生成泛函中对动量的路径积分，即可得到正规顶角间的某些关系式.

设场由 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi(x),\varphi_{,\mu}(x))$ 描述，其 $\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$，$x=(t,\boldsymbol{x})$，平坦时空度规 $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1\ -1\ -1\ -1)$. 场的正则动量和正则 Hamilton 量密度分别为 $\pi=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi}$ 和 $\mathscr{H}_c=\pi\dot{\phi}-\mathscr{L}$. 先考虑正规 Lagrange 量系统，正则 Hamilton 量 $H_c=\int d^3x\mathscr{H}_c$ 是独立正则变量 $\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的泛函. 采用路径积分量子化，系统 Green 函数的相空间生成泛函

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\exp\left\{i\left[I^p+\int d^4x(J\varphi+K\pi)\right]\right\} \qquad (6\text{-}7\text{-}1)$$

式中

$$I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x (\pi \dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}) \tag{6-7-2}$$

为系统的正则作用量. 这里对正则动量 π 也引入了相应的外源，但它并不影响对 Green 函数的计算，

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{\mathrm{i}^n} \frac{\delta^n Z[J, K]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \bigg|_{J=K=0} =$$

$$\langle 0 | T[\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \cdots \hat{\varphi}(x_n)] | 0 \rangle \tag{6-7-3}$$

考虑生成泛函(6-7-1)式在增广相空间中的非定域变换性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + R^\mu_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \\
\varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \\
&\qquad \varphi(x) + \int \mathrm{d}^4 y E(x, y) A_\sigma(y) \varepsilon^\sigma(y) \\
\pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \\
&\qquad \pi(x) + \int \mathrm{d}^4 y F(x, y) B_\sigma(y) \varepsilon^\sigma(y)
\end{aligned}\right\} \tag{6-7-4}$$

式中：$E(x,y)$和 $F(x,y)$为给定的光滑函数；R^μ_σ、A_σ、B_σ 为线性微分算符，且

$$\left.\begin{aligned}
&R^\mu_\sigma = r^{\mu(l)}_\sigma \partial_{\mu(l)}, \ A_\sigma = a^{(m)}_\sigma \partial_{(m)}, \ B_\sigma = b^{(n)}_\sigma \partial_{(n)} \\
&r^{\mu(l)}_\sigma = r_\sigma^{\overbrace{\mu\nu\cdots\lambda}^{l}}, \ a^{(m)}_\sigma = a_\sigma^{\overbrace{\mu\nu\cdots\rho}^{m}}, \ b^{(n)}_\sigma = b_\sigma^{\overbrace{\mu\nu\cdots\delta}^{n}}
\end{aligned}\right\} \tag{6-7-5}$$

而 $r^{\mu(l)}_\sigma$、$a^{(m)}_\sigma$、$b^{(n)}_\sigma$ 分别为 x、φ、π 的光滑函数；$\varepsilon^\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意光滑函数，且它们的值及其微商在四维时空区域边界上均为 0. 在(6-7-4)式变换下，正则作用量(6-7-2)式的变分

$$\delta I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x \left\{ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} \delta\varphi + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi} \delta\pi + \right.$$

$$\left. \partial_\mu [(\pi \dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}) \Delta x^\mu] + \mathrm{D}(\pi \delta\varphi) \right\} \tag{6-7-6}$$

式中 $\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$，且

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} = -\dot{\pi} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi}, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi} = \dot{\varphi} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi} \tag{6-7-7}$$

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - \varphi_{,\mu}\Delta x^{\mu}, \quad \delta\pi = \Delta\pi - \pi_{,\mu}\Delta x^{\mu} \tag{6-7-8}$$

设(6-7-4)式变换的 Jacobi 行列式为 $1+\delta J_1[\varphi,\pi,\varepsilon]$. 生成泛函(6-7-1)式在(6-7-4)式变换下不变,又根据 $\varepsilon^{\sigma}(x)$ 的边界条件,则有

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\left[1 + \delta J_1 + \mathrm{i}\delta I^{\mathrm{p}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(J\delta\varphi + K\delta\pi)\right]\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}^4x(J\varphi + K\pi)\right]\right\} \tag{6-7-9}$$

生成泛函在变换(6-7-4)式下的不变性表明

$$\frac{\delta Z}{\delta\varepsilon^{\sigma}(x)} = 0$$

将(6-7-6)式代入(6-7-9)式,分部积分后关于 $\varepsilon^{\sigma}(x)$ 求泛函微商,并让 $J=K=0$,可得

$$\int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\left\{J_{\sigma}^{0} + \int \mathrm{d}^4y\widetilde{A}_{\sigma}(x)\left[E(y,x)\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi(y)}\right] - \right.$$
$$\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left[\varphi_{,\mu}(x)\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi(x)}\right] + \int \mathrm{d}^4y\widetilde{B}_{\sigma}(x)\left[F(y,x)\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi(y)}\right] -$$
$$\left.\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left[\pi_{,\mu}(x)\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi(x)}\right] + \int \mathrm{d}^4y\widetilde{A}_{\sigma}(x)\mathrm{D}[\pi(y)E(y,x)]\right\}\cdot$$
$$\exp(\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}) = 0 \tag{6-7-10}$$

式中:$J_{\sigma}^{0} = -\mathrm{i}\delta J_1/\delta\varepsilon^{\sigma}(x)\,|_{\varepsilon^{\sigma}(x)=0}$;$\widetilde{A}_{\sigma}$、$\widetilde{B}_{\sigma}$、$\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}$ 分别为 A_{σ}、B_{σ}、R_{σ}^{μ} 的伴随算符[3]. 对区域 Ω 上的任意光滑函数 f、g 和伴随算符 $\widetilde{A}_{\sigma}$、A_{σ} 适合

$$\int_{\Omega} g\widetilde{A}_{\sigma}f\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} fA_{\sigma}g\mathrm{d}\Omega + [\cdot]_{\partial\Omega} \tag{6-7-11}$$

式中$[\cdot]_{\partial\Omega}$为表面项. 与(6-7-10)式相应的 Green 函数适合

$$\langle 0|T^{*}\left[J_{\sigma}^{0} + \int \mathrm{d}^4y\left\{\widetilde{A}_{\sigma}\left[E\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} + \mathrm{D}(\pi E)\right] + \widetilde{B}_{\sigma}\left(F\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)\right\} - \right.$$
$$\left.\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left(\varphi_{,\mu}\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} + \pi_{,\mu}\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)\right]|0\rangle\,|_{\pi=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi}} = 0 \tag{6-7-12}$$

式中:T^{*} 代表一种特定的编时乘积;$|0\rangle$代表场的真空态.

当(6-7-4)式变换的 Jacobi 行列式不依赖于场量时，将(6-7-6)式代入(6-7-9)式，分部积分后关于 $\varepsilon^{\sigma}(x)$ 求泛函微商，可得

$$\left(\int \mathrm{d}^4 y\left\{\widetilde{A}_{\sigma}\left[E\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}+J\right)+\mathrm{D}(\pi E)\right]+\widetilde{B}_{\sigma}\left[F\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}+K\right)\right]\right\}-\right.$$
$$\left.\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left[\varphi_{,\mu}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}+J\right)+\pi_{,\mu}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}+K\right)\right]\right)_{\substack{\varphi\to\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J}\\ \pi\to\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta K}}} Z[J,K]=0 \tag{6-7-13}$$

(6-7-13)式为非定域变换下，系统 Green 函数生成泛函满足的正则形式的 Ward 恒等式. 将(6-7-13)式关于外源 J 多次求泛函微商，并让外源 $J=K=0$，即可得到 Green 函数间的基本关系式. 这里的显著优点在于不必作出生成泛函中对动量的路径积分.

对于用奇异 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi^{a},\varphi^{a}_{,\mu})$ 描述的系统，在相空间中存在固有约束. 设系统的第一类约束 $\Lambda_k(\varphi,\pi)\approx 0(k=1,2,\cdots,K_1)$；第二类约束 $\theta_j(\varphi,\pi)\approx 0(j=1,2,\cdots,J_1)$；与第一类约束相应的规范条件 $\Omega_k(\varphi,\pi)\approx 0(k=1,2,\cdots,K_1)$. 按 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化方案，该约束 Hamilton 系统 Green 函数的相空间生成泛函为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\varphi^{a}\mathscr{D}\pi_{a}\prod_{j,k,l}\delta(\theta_j)\ \delta(\Lambda_k)\ \delta(\Omega_l)\ \det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|\cdot$$
$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4 x(J_a\varphi^{a}+K^{a}\pi_a)\right]\right\} \tag{6-7-14}$$

利用 δ-函数和 Grassmann 变量 $C(x)$、$\overline{C}(x)$ 的积分性质

$$\det|\{M_k(x),N_l(y)\}|=$$
$$\int\mathscr{D}C_l(y)\mathscr{D}\overline{C}_k(x)\cdot\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\overline{C}_k(x)\cdot\right.$$
$$\left.\{M_k(x),N_l(y)\}C_l(y)\right] \tag{6-7-15}$$

(6-7-14)式可化为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^{\alpha}\,\mathscr{D}\pi_{\alpha}\,\mathscr{D}\lambda_{m}\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\bar{C}\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\left[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^{4}x(J_{\alpha}\varphi^{\alpha}+K^{\alpha}\pi_{\alpha})\right]\right\}\qquad(6\text{-}7\text{-}16)$$

式中

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^{4}x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{m}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}})\qquad(6\text{-}7\text{-}17)$$

$$\mathscr{L}_{m}=\lambda_{j}\theta_{j}+\lambda_{k}\Lambda_{k}+\lambda_{l}\Omega_{l},\quad\lambda_{m}=(\lambda_{j},\lambda_{k},\lambda_{l})\qquad(6\text{-}7\text{-}18)$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=\int\mathrm{d}^{4}y\Big[\bar{C}_{k}(x)\{\Lambda_{k}(x),\Omega_{l}(y)\}C_{l}(y)+$$

$$\frac{1}{2}\bar{C}_{i}(x)\{\theta_{i}(x),\theta_{j}(y)\}C_{j}(y)\Big]\qquad(6\text{-}7\text{-}19)$$

设记 $\varphi=(\varphi^{\alpha},\lambda_{m},C_{l},\bar{C}_{k})$，$\pi=(\pi_{\alpha})$，$J=(J_{\alpha})$，$K=(K^{\alpha})$，于是(6-7-16)式可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\left[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^{4}x(J\varphi+K\pi)\right]\right\}\qquad(6\text{-}7\text{-}20)$$

通过与正规 Lagrange 量系统类似的讨论，可得奇异 Lagrange 量系统相应的非定域正则 Ward 恒等式，这时只需将(6-7-13)中的 I^{p} 换为 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$就是了.

下面讨论非定域正则 Ward 恒等式在非 Abel-Chern-Simons 理论中的应用.

近来研究了(1+2)维时空 Abel Chern-Simons 规范理论中呈现的分数自旋和分数统计性质[31,32]，这在解释量子 Hall 效应乃至高温超导现象中有重要意义[33]. 非 Abel Chern-Simons 项与物质场耦合，也可改变系统的自旋统计性质[34,35]. 这里，讨论非定域正则 Ward 恒等式在(1+2)维带 Maxwell 项的非 Abel Chern-

Simons物质场论中的应用. 系统的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\partial_\mu A^a_\nu A^a_\rho +$$

$$\frac{1}{3}f^a_{bc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho\Big) + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \qquad (6\text{-}7\text{-}21)$$

式中:D_μ 为协变微商;$\psi=\psi^a T^a$,其中 T^a 为规范群(如 $SU(n)$)表示的生成元;f^a_{bc}为规范群的结构常数,

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu \qquad (6\text{-}7\text{-}22)$$

理论的规范不变性要求参数 $\kappa=n/2\pi$(n 为整数)[36]. 场 $A^a_\mu(x)$与 Fermi场 $\psi(x)$和 $\bar{\psi}(x)$的正则共轭动量分别为

$$\pi^{a\mu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot{A}^a_\mu} = F^{a\mu 0} + \kappa\varepsilon^{0\mu\nu}A^a_\nu \qquad (6\text{-}7\text{-}23)$$

$$\bar{p}^a = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^a} = \mathrm{i}\bar{\psi}^a\gamma^0 \qquad (6\text{-}7\text{-}24)$$

$$p^a = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}^a} = 0 \qquad (6\text{-}7\text{-}25)$$

在相空间中,系统存在的约束分别为

$$\Lambda^a_1 = \pi^{a0} \approx 0 \qquad (6\text{-}7\text{-}26)$$

$$\bar{\theta}^a = \bar{p}^a - \mathrm{i}\bar{\psi}^a\gamma^0 \approx 0 \qquad (6\text{-}7\text{-}27)$$

$$\theta^a = p^a \approx 0 \qquad (6\text{-}7\text{-}28)$$

$$\Lambda^a_2 = f^a_{bc}(\bar{\psi}^b p^c + \bar{p}^b\psi^c) + \partial_i\pi^{ai} -$$

$$f^a_{bc}A^b_i\pi^{ci} + \kappa\varepsilon^{ij}\partial_i A^a_j \qquad (6\text{-}7\text{-}29)$$

式中:Λ^a_1 和 Λ^a_2 为第一类约束;$\bar{\theta}^a$ 和 θ^a 为第二类约束.

按 Faddeev-Senjanovic 对约束 Hamilton 系统的量子化方案方法,对每一个第一类约束,需选取一个规范条件. 此时规范条件取为

$$\Omega^a_1 = \partial_i\pi^{ai} + \nabla^2 A^a_0 - f^a_{bc}A^b_i\partial^i A^c_0 \approx 0 \qquad (6\text{-}7\text{-}30)$$

$$\Omega_2^a = \partial^i A_i^a \approx 0 \tag{6-7-31}$$

不难验证，det $|\{\bar{\theta}^a, \theta^b\}|$ 与场量无关，可以从生成泛函中略去，而 det $|\{\Lambda^a, \Omega^c\}|$ =det M^{ac}，其中

$$M^{ac} = (\delta^{ac}\nabla^2 - f^a_{bc}A^b_i\partial^i)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

理论的规范无关性，生成泛函中的因子 $\delta(\partial^i A_i^a)$det M^{ab} 可以用因子 $(\partial^\mu A^a_\mu)$det M_l^{ab} 来代替[37]，

$$M_L^{ac} = (\delta^{ab}\partial^2 - f^a_{bc}A^b_\mu\partial^\mu)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{6-7-32}$$

于是，系统 Green 函数在相空间中的生成泛函可写为

$$\begin{aligned} &Z[J, K_\mu, \bar{\eta}, K, \eta, \bar{K}, \bar{\zeta}, \zeta, \xi, X, Y] = \\ &\int \mathscr{D}A^a_\mu \, \mathscr{D}\pi^{a\mu} \, \mathscr{D}\psi \, \mathscr{D}\bar{p} \, \mathscr{D}\bar{\psi} \, \mathscr{D}p \, \mathscr{D}\bar{C}^a \, \mathscr{D}C^a \, \mathscr{D}\lambda^a_k \, \mathscr{D}\omega^l_k \, \mathscr{D}\nu^a_k \cdot \\ &\exp\left\{ i\int d^3x(\mathscr{L}^p_{\text{eff}} + J^\mu_a A^a_\mu + K^a_\mu \pi^{a\mu} + \bar{\eta}^a\psi^a + \right. \\ &\bar{p}^a K^a + \bar{\psi}^a\eta^a + \bar{K}^a p^a + \bar{\zeta}^a C^a + \bar{C}^a\zeta^a + \\ &\left. \xi^a_k\lambda^a_k + X^l_k\omega^l_k + Y^a_k\nu^a_k) \right\} \end{aligned} \tag{6-7-33}$$

式中

$$\mathscr{L}^p_{\text{eff}} = \mathscr{L}^p + \mathscr{L}_m + \mathscr{L}_{\text{gh}} \tag{6-7-34}$$

$$\mathscr{L}^p = \pi^{a\mu}\dot{A}^a_\mu + \dot{\psi}^a\bar{p}^a + \dot{\bar{\psi}}^a p^a - \mathscr{H}_c \tag{6-7-35}$$

$$\mathscr{L}_m = \nu^a_k\theta^a_k + \lambda^a_k\Lambda^a_k + \omega^a_l\bar{\Omega}^a_l$$

$$(\bar{\Omega}^a_1 = \Omega^a_1,\ \bar{\Omega}^a_2 = \partial^\mu A^a_\mu) \tag{6-7-36}$$

$$\mathscr{L}_{\text{gh}} = \bar{C}^a M^{ab}_L C^b = -\partial^\mu\bar{C}^a D^a_{\mu b} C^b \tag{6-7-37}$$

和杨-Mills 理论中类似的讨论可考虑类似于(6-5-41)式的非定域变换，导出与(6-5-48)式相似的关系式．

§6-8 整体正则对称性和 Ward 恒等式

整体对称性和守恒律的联系在经典理论中由 Noether 第一定

律给出. Noether 第二定理或 Noether 恒等式涉及的是系统的定域对称性. 在量子理论中 Noether 恒等式对应于 Ward 恒等式. Noether 定理和 Ward 恒等式通常均是在位形空间中给出的. 第二章和第三章中已建立了正则形式的 Noether 定理. Ward 恒等式在量子场论中占重要地位,该恒等式已被推广到超对称[38]、超弦[39]等其他理论中. 从路径积分导出 Ward 恒等式,通常是由位形空间中的生成泛函出发的,它只适用于相空间路径积分对正则动量可积的情形,此时可将相空间路径积分化为位形空间中的路径积分. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本,因此对系统在相空间中正则对称性的研究,就具有更重要的意义. 前面已建立了相空间中定域和非定域变换下正则形式的 Ward 恒等式. 这里进一步研究量子系统在相空间中的整体对称性质[9,10,40~42]. 为此,首先建立整体变换下的正则 Ward 恒等式.

设物理场的运动由场量 $\varphi(x)$ 描述,场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\varphi,\varphi_{,\mu})$. 先考虑正规 Lagrange 量系统,场的正则 Hamilton 量

$$H_c=\int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}_c=\int \mathrm{d}^3x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{L})$$

是独立正则变量 $\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的泛函,其中 $\pi(x)=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi}(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的正则共轭动量. 采用路径积分量子化,其 Green 函数在相空间中的生成泛函为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)\right]\right\} \tag{6-8-1}$$

其中

$$I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c) \tag{6-8-2}$$

为系统的正则作用量. 这里对正则动量 π 引入外源 K,并不影响对 Green 函数计算的结果.

设 $F(\varphi,\pi)$ 是正则变量 $\varphi(x)$、$\pi(x)$ 的给定泛函,定义

$$Z_F[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi \mathscr{D}\pi \, F(\varphi,\pi) \cdot$$
$$\exp\left\{ i\left[I^p + \int d^4x (J\varphi + K\pi) \right]\right\} \tag{6-8-3}$$

当 $J=K=0$ 时，(6-8-3)式给出算符 $\hat{F}(\hat{\varphi},\hat{\pi})$在场的基态上的期望值. 考虑增广相空间中的无穷小整体变换：

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x;\varphi,\pi) \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma \xi^\sigma(x;\varphi,\pi) \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma \eta^\sigma(x;\varphi,\pi) \end{aligned}\right\} \tag{6-8-4}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意参数；$\tau^{\mu\sigma}$、$\xi^\sigma$ 和 η^σ 分别为 x、$\varphi(x)$和 $\pi(x)$的函数. 例如：场的共形变换和内部对称变换均属于(6-8-4)式的特殊情况. 在(6-8-4)式变换下，正则作用量的变分

$$\delta I^p = \int d^4x \varepsilon_\sigma \left\{ \frac{\delta I^p}{\delta\varphi}(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \frac{\delta I^p}{\delta\pi}(\eta^\sigma - \pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \right.$$
$$\left. \partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] \right\} \tag{6-8-5}$$

其中 $D=d/dt$，且

$$\frac{\delta I^p}{\delta\varphi} = -\dot{\pi} - \frac{\delta H_c}{\delta\varphi}, \quad \frac{\delta I^p}{\delta\pi} = \dot{\varphi} - \frac{\delta H_c}{\delta\pi} \tag{6-8-6}$$

设(6-8-4)式变换的 Jacobi 行列式为 1. 如果泛函 $F(\varphi,\pi)$和正则作用量 I^p 在(6-8-4)式变换下不变，根据路径积分(6-8-3)式在积分变量变换下的不变性，可得

$$Z_F[J,K] =$$
$$\int \mathscr{D}\varphi \mathscr{D}\pi \, F(\varphi,\pi) \left(1 + i\varepsilon_\sigma \int d^4x \left\{ J(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. K(\eta^\sigma - \pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \partial_\mu[(J\varphi + K\pi)\tau^{\mu\sigma}] \right\} \right) \cdot$$
$$\exp\left\{ i\left[I^p + \int d^4x (J\varphi + K\pi) \right]\right\} =$$

$$\left(1+\mathrm{i}\varepsilon_\sigma\int\mathrm{d}^4x\left\{J\left[\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right]+K\left[\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\partial_\mu\left[\tau^{\mu\sigma}\left(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]\right\}\right)_{\substack{\varphi\to-\mathrm{i}\delta/\delta J\\ \pi\to-\mathrm{i}\delta/\delta K}}Z_F[J,K] \tag{6-8-7}$$

从而路径积分 $Z_F[J,K]$满足

$$\int\mathrm{d}^4x\left\{J\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+K\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)+\right.$$

$$\left.\partial_\mu\left[\tau^{\mu\sigma}\left(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]\right\}_{\substack{\varphi\to-\mathrm{i}\delta/\delta J\\ \pi\to-\mathrm{i}\delta/\delta K}}Z_F[J,K]=0 \tag{6-8-8}$$

在(6-8-4)式变换下，如果正则作用量 I^{P} 不变，但 $F(\varphi,\pi)$是变更的，那么路径积分(6-8-3)式满足

$$\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{\delta F}{\delta\varphi}\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+\frac{\delta F}{\delta\pi}\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]+\right.$$

$$J\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+K\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)+$$

$$\left.\partial_\mu\left[\tau^{\mu\sigma}\left(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]\right\}_{\substack{\varphi\to-\mathrm{i}\delta/\delta J\\ \pi\to-\mathrm{i}\delta/\delta K}}Z_F[J,K]=0 \tag{6-8-9}$$

在(6-8-9)式中取 $F=1$，由(6-8-1)、(6-8-3)、(6-8-9)式可得 Green 函数的生成泛函 $Z[J,K]$，并满足

$$\int\mathrm{d}^4x\left\{J\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+K\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)+\right.$$

$$\left.\partial_\mu\left[\tau^{\mu\sigma}\left(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]\right\}_{\substack{\varphi\to-\mathrm{i}\delta/\delta J\\ \pi\to-\mathrm{i}\delta/\delta K}}Z[J,K]=0 \tag{6-8-10a}$$

对于内部对称变换 $\tau^{\mu\sigma}=0$，此时生成泛函 $Z[J,K]$适合[25]

$$\int\mathrm{d}^4x\left[J(x)\xi^\sigma\left(x,\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)+\right.$$

$$\left.K(x)\eta^\sigma\left(x,\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]Z[J,K]=0 \tag{6-8-10b}$$

如果在(6-8-4)式变换下，正则作用量 I^{P} 和 F 均是变更的，那么泛函积分(6-8-3)式满足关系式

$$\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{\delta F}{\delta\varphi}\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+\frac{\delta F}{\delta\pi}\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]+\right.$$

$$\left(-\dot{\pi}-\frac{\delta H_c}{\delta\varphi}\right)\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+\left(\dot{\varphi}-\frac{\delta H_c}{\delta\pi}\right)\cdot$$

$$\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)+\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}]+$$

$$\mathrm{D}\left[\pi\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)\right]+J\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+$$

$$K\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\partial}{\mathrm{i}\partial K}\right)+\partial_\mu\left[\tau^{\mu\sigma}\left(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]\right\}_{\substack{\varphi\to-\mathrm{i}\delta/\delta J\\ \pi\to-\mathrm{i}\delta/\delta K}}Z_F[J,K]=0 \tag{6-8-11}$$

这里分别称(6-8-8)～(6-8-11)式为相空间中整体变换下的正则形式的 Ward 恒等式，对(6-8-10)式关于 $J(x)$ 求多次泛函微商，并让所有外源为 0($J=K=0$)，不必作出生成泛函(6-8-1)式中对动量的路径积分，即可得Green函数间的一些关系式.

对于用奇异 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)$ 描述的系统，在相空间中存在固有约束. 设 $\Lambda_k\approx0(k=1,2,\cdots,K_1)$ 为第一类约束；$\theta_i\approx0(i=1,2,\cdots,I_1)$ 为第二类约束；与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k\approx0$ $(k=1,2,\cdots,K_1)$. 通过和§6-7 中类似的讨论，该奇异 Lagrange 量系统在相空间中的生成泛函可简化为(6-7-20)式的形式，即

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\,\exp\left\{\mathrm{i}\left[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)\right]\right\} \tag{6-8-12}$$

其中 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 由(6-7-17)式给出. 通过上述类似的讨论，可得奇异 Lagrange 量系统在相空间中整体对称的正则形式的 Ward 恒等式. 这只需将(6-8-3)、(6-8-5)、(6-8-7)式中的 I^{p} 换为 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$就是了.

§6-9 量子守恒律

对称性和守恒律的联系在经典理论中通常由 Noether 定理给

出. 在建立场论中量子水平下相空间中的 Noether 定理[43]时，先讨论正规 Lagrange 量系统，并假设系统具有整体变换(ε_σ 为参数)

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon^\sigma \tau^{\mu\sigma}(x;\varphi,\pi) \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma \xi^\sigma(x;\varphi,\pi) \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma \eta^\sigma(x;\varphi,\pi) \end{aligned}\right\} \tag{6-9-1}$$

下的对称性，其正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}) \tag{6-9-2}$$

在(6-9-1)式变换下不变，其中 $\tau^{\mu\sigma}$、ξ^σ、η^σ 均为 x、φ、π 的函数. 将变换(6-9-1)式定域化，即把 ε_σ 视为时空点的函数. 现考虑如下定域变换：

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x;\varphi,\pi) \\ \varphi'(x)' &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma(x)\xi^\sigma(x;\varphi,\pi) \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma(x)\eta^\sigma(x;\varphi,\pi) \end{aligned}\right\} \tag{6-9-3}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，它们及其所需的各阶偏微商在四维时空区域的边界上为 0. 在(6-9-3)式变换下，正则作用量(6-9-2)式的变分

$$\begin{aligned} \Delta I^{\mathrm{p}} = &\int \mathrm{d}^4 x \varepsilon_\sigma(x) \Big\{ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}(\eta^\sigma - \pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \\ &\partial_\mu\big[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}\big] + \mathrm{D}\big[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\big]\Big\} + \\ &\int \mathrm{d}^4 x \{ \big[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}\big]\partial_\mu \varepsilon_\sigma(x) + \\ &\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\varepsilon_\sigma(x)\} \end{aligned} \tag{6-9-4}$$

由于假设正则作用量(6-9-2)式在整体变换(6-9-1)式下不变，因而(6-9-4)式中的第一个积分为 0. 根据 $\varepsilon_\sigma(x)$的边界条件，(6-9-4)式又可写为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x \{ \big[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}\big]\partial_\mu \varepsilon_\sigma(x) + \pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \cdot$$

$$\mathrm{D}\varepsilon_\sigma(x)\} = -\int \mathrm{d}^4 x \varepsilon_\sigma(x)\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}] +$$
$$\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\} \tag{6-9-5}$$

生成泛函

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi\, \mathscr{D}\pi \exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}^4 x(J\varphi + K\pi)\right]\right\} \tag{6-9-6}$$

在(6-9-3)式变换下的不变性(设变换的 Jacobi 行列式为 1),有

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi\, \mathscr{D}\pi \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x[\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c + J\varphi + K\pi]\right\} \cdot$$
$$\Big(1 - \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \varepsilon_\sigma(x)\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}] +$$
$$\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] - J(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) -$$
$$K(\eta^\sigma - \pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\}\Big) \tag{6-9-7}$$

对(6-9-7)式关于 $\varepsilon_\sigma(x)$ 求泛函微商,并让 $J=K=0$,得

$$\int \mathscr{D}\varphi \mathscr{D}\pi\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\} \cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\right\} = 0 \tag{6-9-8}$$

从而

$$\langle 0|T^*\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}] +$$
$$\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\}|0\rangle = 0 \tag{6-9-9}$$

式中:$|0\rangle$代表场的基态;T^* 为一种特定形式的编时乘积[2]. (6-9-9)式又可写为

$$\partial_\mu\langle 0|T[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}]|0\rangle +$$
$$\mathrm{D}\langle 0|T[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]|0\rangle = 0 \tag{6-9-10}$$

在四维时空中取一柱体,柱轴沿 t 轴方向;下底 V_1 代表 $t=t_1$ 的超平面,上底 V_2 代表 $t=t_2$ 的超平面. 在此四维柱体上对(6-9-10)式

积分，并让柱侧面趋于无穷远. 利用四维 Gauss 定理以及柱侧面趋于无穷时场在其上为 0 的条件，得

$$\int_V \mathrm{d}^3x \langle 0|T[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_c\tau^{0\sigma}]|0\rangle = \text{const}$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{6-9-11}$$

这样，就得到了场论中相空间量子情形下的 Noether 定理：假如系统的正则作用量(6-9-2)式在增广相空间中(6-9-1)式的变换下不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1，那么在量子理论中该系统必存在守恒荷(6-9-11)式，这个守恒量恰为经典正则 Noether 定理[44]的量子水平表述．它表明在增广相空间具有整体对称性的系统，其相应的守恒算符在基态的期望值为常数. 对无反常的系统，此结论成立. 从相空间对称性的分析出发，导出守恒荷(6-9-11)式的突出优点在于不必作出相空间生成泛函中对动量的路径积分.

用奇异 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\psi^\alpha,\psi^\alpha_{,\mu})(\alpha=1,2,\cdots,n)$描述的系统，其 Hess 矩阵是退化的，过渡到正则形式描述时，在相空间中存在固有约束，即为约束 Hamilton 系统. 设 $\Lambda_k(\psi^\alpha,\pi_\alpha)\approx 0(k=1,2\cdots,K_1)$为系统的第一类约束；$\theta_i(\psi^\alpha,\pi_\alpha)(i=1,2,\cdots,I_1)$为系统的第二类约束. 又设与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k(\psi^\alpha,\pi_\alpha)\approx 0(k=1,2,\cdots,K_1)$. 对场量 ψ^α 和它的正则动量 π_α 分别引入外源 J_α 和 K^α，那么奇异 Lagrange 量系统 Green 函数的相空间生成泛函为

$$Z[J,K,\xi,\bar{\eta},\eta,\bar{\zeta},\zeta] =$$

$$\int \mathscr{D}\psi^\alpha \mathscr{D}\pi_\alpha \mathscr{D}\lambda_m \mathscr{D}C^\alpha \mathscr{D}\bar{C}^\alpha \mathscr{D}p_\alpha \mathscr{D}\bar{p}_\alpha \cdot$$

$$\exp\Big\{\mathrm{i}\Big[I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} + \int \mathrm{d}^4x(J_\alpha\psi^\alpha + K^\alpha\pi_\alpha + \xi^m\lambda_m + \bar{\eta}_\alpha C^\alpha +$$

$$\bar{C}^\alpha\eta_\alpha + \bar{\zeta}^\alpha p_\alpha + \bar{p}_\alpha\zeta^\alpha)\Big]\Big\} \tag{6-9-12a}$$

式中 $I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$为有效正则作用量，且

$$I_{\text{eff}}^{\text{p}} = \int \mathrm{d}^4 x \Big\{ \pi_\alpha \dot{\psi}^\alpha - \mathscr{H}_c + \lambda_i \theta_i + \lambda_k \Lambda_k + \lambda_l \Omega_l +$$

$$\int \mathrm{d}^4 y \Big[\bar{C}_k(x) \{ \Lambda_k(x), \Omega_l(y) \} C_l(y) +$$

$$\frac{1}{2} \bar{C}_i(x) \{ \theta_i(x), \theta_j(y) \} C_j(y) \Big] \Big\} \qquad (6\text{-}9\text{-}12\text{b})$$

其中：$\lambda_m(x) = (\lambda_i(x), \lambda_k(x), \lambda_l(x))$；$\mathscr{H}_c$ 为场相应的正则 Hamilton 量密度；$p_\alpha(x)$和 $\bar{p}_\alpha(x)$分别为鬼场 $C^\alpha(x)$和 $\bar{C}^\alpha(x)$的正则动量；$\{\cdot,\cdot\}$为场的 Poisson 括号. 为简化记号，令 $\varphi = \{\psi^\alpha, \lambda_m, C^\alpha, \bar{C}^\alpha\}$，$\pi = (\pi_\alpha, p_\alpha, \bar{p}_\alpha)$，$\varphi$的外源记为 $J = (J^\alpha, \xi^m, \bar{\eta}_\alpha, \eta_\alpha)$，$\pi$ 的外源为 $K = (K^\alpha, \bar{\zeta}^\alpha, \zeta^\alpha)$. 这样(5-9-12a)可简写为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi \, \mathscr{D}\pi \, \exp\Big\{ \mathrm{i} \Big[I_{\text{eff}}^{\text{p}} +$$

$$\int \mathrm{d}^4 x (J\varphi + K\pi) \Big] \Big\} \qquad (6\text{-}9\text{-}13\text{a})$$

$$I_{\text{eff}}^{\text{p}} = \int \mathrm{d}^4 x (\pi \dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\text{eff}}) \qquad (6\text{-}9\text{-}13\text{b})$$

与上述完全类似的讨论可以得到，如果有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$在增广相空间中的整体变换(类似于(6-9-1)式那样)下不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1，那么该奇异 Lagrange 量系统存在相应的守恒荷，即

$$\int_V \mathrm{d}^3 x \langle 0 | T[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k} \tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\text{eff}} \tau^{0\sigma}] | 0 \rangle = \text{const}$$

$$(\sigma = 1, 2, \cdots, r) \qquad (6\text{-}9\text{-}14)$$

值得注意的是，(6-9-14)式中出现的 $\mathscr{H}_{\text{eff}}$与(6-9-11)式中的 $\mathscr{H}_c$ 是不同的，在内部对称变换下(如幺正变换)，$\tau^{\mu\sigma} = 0$，(6-9-11)、(6-9-14)式在形式上才一样. 在整体变换下保持系统有效正则作用量不变，不仅需要保持正则作用量不变，而且还需要保持约束不变，等等，且变换的 Jacobi 行列式为 1，才能保证守恒荷(6-9-14)式的

存在，这些都与正规 Lagrange 量系统不同. 从上面得到的结果还可以看到，经典理论中的对称所联系的守恒量在量子理论中不一定再保持，因为经典的整体正则对称变换保持了正则作用量 I^{P} 不变，它不一定能保持量子化后的有效正则作用量 $I^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}$不变，且该变换的 Jacobi 行列式也不一定为 1. 但是，在某些情况下，经典正则对称性和它所对应的守恒量在量子理论中仍然是保持的. 例如：对仅含第二类约束 θ_i 的系统，当$\{\theta_i,\theta_j\}$与场量无关时，在此情形下可将因子 $\det|\{\theta_i,\theta_j\}|$从生成泛函中略去，而不必引入鬼场 $C^{\alpha}(x)$、$\overline{C}^{\alpha}(x)$. 如果在场量的内部对称变换下(乘子场不改变)，系统的正则作用量和约束条件均不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1，那么，由(6-9-14)式可见，经典正则形式守恒量[6]在量子理论中仍然是保持的(无反常情形).

§6-10　π 介子与核子的赝标耦合

核子和 π 介子(π—N)赝标耦合的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}(x)=\bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}-m)\psi(x)-\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\varphi(x))^{2}-\frac{1}{2}\mu^{2}(\varphi(x))^{2}-\frac{\lambda}{4!}(\varphi(x))^{4}-\mathrm{i}g\bar{\psi}(x)\gamma_{5}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}(x)\psi(x) \tag{6-10-1}$$

式中：$\psi(x)$为同位旋量，即

$$\psi(x)=\begin{bmatrix}\psi_{p}(x)\\ \psi_{n}(x)\end{bmatrix} \tag{6-10-2}$$

$\varphi(x)$为同位矢量，即

$$\varphi(x)=\begin{bmatrix}\varphi_{1}(x)\\ \varphi_{2}(x)\\ \varphi_{3}(x)\end{bmatrix} \tag{6-10-3a}$$

$$\varphi^{\pm}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{1}(x)\pm\mathrm{i}\varphi_{2}(x)) \tag{6-10-3b}$$

$$\varphi_0(x) = \varphi_3(x) \tag{6-10-3c}$$

τ为同位旋矩阵. 标积和矢积均是在同位旋空间中进行的.

场 $\psi(x)$、$\bar{\psi}(x)$、$\varphi(x)$的正则共轭动量分别为

$$\pi_\psi(x) = \frac{\partial_r \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}(x)} = \mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma^0 \tag{6-10-4}$$

$$\pi_{\bar{\psi}}(x) = \frac{\partial_r \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}(x)} = 0 \tag{6-10-5}$$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) \tag{6-10-6}$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c(x) =& \dot{\psi}(x)\pi_\psi(x) + \dot{\bar{\psi}}(x)\pi_{\bar{\psi}}(x) + \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathscr{L}(x) = \\ & \frac{1}{2}(\pi^2 + \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi + \mu^2\varphi^2) + \frac{\pi}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{2}\pi_\psi\gamma^0\gamma_k(\partial^k\psi) - \\ & \frac{1}{2}(\partial^k\pi_\psi)\gamma^0\gamma_k\psi - \mathrm{i}m\pi_\psi\gamma^0\psi + g\pi_\psi\gamma^0\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}\psi\end{aligned} \tag{6-10-7}$$

初级约束为

$$\Phi_1^0 = \pi_\psi - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \tag{6-10-8}$$

$$\Phi_2^0 = \pi_{\bar{\psi}} \approx 0 \tag{6-10-9}$$

总 Hamilton 量

$$H_\mathrm{T} = \int \mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_c + \lambda_1\Phi_1^0 + \lambda_2\Phi_2^0) \tag{6-10-10}$$

初级约束的自治性条件

$$\{\Phi_i^0, H_\mathrm{T}\} \approx 0 \quad (i = 1,2) \tag{6-10-11}$$

给出 Lagrange 乘子 $\lambda_1(x)$和 $\lambda_2(x)$适合的方程,不导致新的次级约束. Φ_1^0 和 Φ_2^0 为第二类约束,它们的 Poisson 括号$\{\Phi_1^0,\Phi_2^0\}$与场量无关,其行列式 $\det|\{\Phi_1^0,\Phi_2^0\}|$可从生成泛函中略去,不必引入鬼场 $C^\alpha(x)$、$\bar{C}(x)$. 系统的有效正则作用量

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}} = \int \mathrm{d}^4x[\dot{\psi}\pi_\psi + \dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}} + \pi\dot{\varphi} -$$

$$\mathscr{H}_c - \lambda_1\Phi_1^0 - \lambda_2\Phi_2^0] \tag{6-10-12}$$

此有效正则作用量(5-10-12)式在下列相空间中内部变换

$$\left.\begin{aligned} &\psi_p(x) \to e^{-ie\theta}\psi_p(x),\ \pi_p(x) \to e^{+ie\theta}\pi_p(x) \\ &\psi_n(x) \to \psi_n(x),\ \pi_n(x) \to \pi_n(x) \\ &\varphi^{\pm}(x) \to e^{\pm ie\theta}\varphi^{\pm}(x),\ \pi^{\pm}(x) \to e^{\pm ie\theta}\pi^{\pm}(x) \end{aligned}\right\} \tag{6-10-13}$$

下是不变的，其中 θ 为参数，即系统的正则作用量和约束 Φ_1^0、Φ_2^0 在(6-10-13)式变换下均是不变的，且变换的 Jacobi 行列式为 1. 由(6-9-14)式得

$$\begin{aligned} Q = & e\int d^3x\langle 0|T[\bar{\psi}_p\gamma^0\psi_p + \\ & (\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\pi})_3]|0\rangle = \text{const} \end{aligned} \tag{6-10-14}$$

(6-10-14)式为电荷守恒的量子形式表述.

§6-11 整体正则对称性和量子守恒律

在经典理论中，整体正则对称性和守恒律的联系已在第二章和第三章中阐明[44]，量子水平的守恒荷在§6-9 和§6-10 中已讨论，这里进一步研究这个问题，并导出整体正则对称性所对应的量子守恒律(算符形式). 为此，首先讨论正规 Lagrange 量系统. 假设系统的正则作用量(6-8-2)式在(6-8-4)式变换下不变，并将该变换定域化，即考虑与(6-8-4)式相应的定域变换，有

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x;\varphi,\pi) \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma(x)\xi^\sigma(x;\varphi,\pi) \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma(x)\eta^\sigma(x;\varphi,\pi) \end{aligned}\right\} \tag{6-11-1}$$

式中 $\varepsilon_\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，它们的值及其微商在四维时空区域的边界上为 0. 在(6-11-1)式变换下，正则作用量

(6-8-2)式的变分

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x\varepsilon_\sigma(x)\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}(\eta^\sigma-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\right.$$

$$\left.\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\right\}+$$

$$\int \mathrm{d}^4x\{[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]\partial_\mu\varepsilon_\sigma(x)+$$

$$\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\varepsilon_\sigma(x)\} \tag{6-11-2}$$

由于假设正则作用量 I^{p} 在(6-8-4)式的整体下不变,因此(6-11-2)式变换中的第一个积分为 0. 假设(6-11-1)式变换的 Jacobi 行列式为 1. 生成泛函(6-8-1)式在(6-11-1)式变换下是不变的．将(6-11-2)式中剩下的项做分部积分,利用 $\varepsilon_\sigma(x)$的边界条件,将所得结果代入(6-8-1)式,并对 $\varepsilon_\sigma(x)$求泛函微商,得

$$\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]-M^\sigma\}\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)\right]\right\}=0 \tag{6-11-3}$$

式中

$$M^\sigma=J(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+K(\eta^\sigma-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \tag{6-11-4}$$

将(6-11-3)式关于 $J(x)$做 n 次泛函微商,得

$$\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi(\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]-M^\sigma\}\cdot$$

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)-\mathrm{i}\sum_j\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)\cdot$$

$$N^\sigma\delta(x-x_j))\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)\right]\right\}=0 \tag{6-11-5}$$

式中

$$N^\sigma=\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma} \tag{6-11-6}$$

在(6-11-5)中,让 $J=K=0$ 得

$$\langle 0|T^*\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\}\cdot$$

$$\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle=$$

$$\mathrm{i}\sum_j\langle 0|T^*[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\cdot$$

$$\varphi(x_n)N^\sigma]|0\rangle\delta(x-x_j) \tag{6-11-7}$$

固定 t,让

$$t_1,t_2,\cdots,t_m\to\infty;\quad t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_n\to-\infty$$

利用约化公式[45],可将(6-11-7)式化为

$$\langle \text{out},m|\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\}$$
$$|n-m,\text{in}\rangle=0 \tag{6-11-8}$$

由于 m 和 n 的任意性,由(6-11-8)式得

$$\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]=0 \tag{6-11-9}$$

在四维时空中取一柱体,柱轴沿 t 轴方向,上底 V_1 和下底 V_2 分别为 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的超平面.在此四维柱体上对(6-11-9)式积分,利用四维 Gauss 定理及柱侧面趋于无穷远时场为 0 的条件,可得量子守恒量[46]

$$Q_r^\sigma=\int_V \mathrm{d}^3x[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_c\tau^{0\sigma}]=\text{const}$$
$$(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{6-11-10}$$

由此得到,对于正规 Lagrange 量系统,如果系统的正则作用量在增广相空间中的整体变换下不变,且相应变换的 Jacobi 行列式为 1,那么系统必存在量子守恒量(6-11-10)式.此结果可视为量子水平的正则形式 Noether 定理.无反常情形,此结论成立.这个结果说明(6-9-11)式中的真空期望值的记号还可以去掉.

对于奇异 Lagrange 量系统,其 Green 函数的生成泛函由(6-8-12)式给出.如果有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 在(6-8-4)式那样的变换下不变,且相应(6-11-1)式变换的 Jacobi 行列式为 1,那么与正规 Lagrange 量系统类似的讨论,可得奇异 Lagrange 量系统的量子守恒量

$$Q_s^\sigma=\int_V \mathrm{d}^3x[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}]=\text{const}$$
$$(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{6-11-11}$$

式中 $\mathscr{H}_{\text{eff}}$是有效 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^{\text{p}}_{\text{eff}}$相应的 Hamilton 量密度. 这个结果对应于经典理论中的正则形式 Noether 定理[44]. 由于 $\mathscr{H}_{\text{eff}}$与正则 Hamilton 量密度 $\mathscr{H}_{\text{c}}$ 不同,因而守恒量(6-11-11)式与守恒量(6-11-10)式是不同的. 对于奇异 Lagrange 量系统,在量子水平存在守恒量 Q^{σ}_{s},不仅需要求正则作用量在增广相空间中的整体变换下不变,而且还需要求约束条件在该变换下不变,这样才能保证有效正则作用量 $I^{\text{p}}_{\text{eff}}$在该变换下的不变性. 从(6-11-11)式不难看出,经典理论中对称性所联系的守恒律,在量子理论中不一定再保持(特别是对奇异 Lagrange 量系统). 在约束 Hamilton 系统的经典理论中,Dirac 曾猜想,所有第一类约束(初级和次级)均是规范变换的生成元. 如果这个猜想成立,系统的经典正则方程应由扩展的 Hamilton 量 H_{E} 导出,守恒量也由 H_{E} 决定,而不是由总 Hamilton 量 H_{T} 决定. 长期以来,关于 Dirac 猜想有不同的争议[20,21],无论 Dirac 猜想是否有效,约束 Hamilton 系统的量子正则方程是由有效 Hamilton 量 $\mathscr{H}_{\text{eff}}$ 导出[19],因而量子守恒量由 $\mathscr{H}_{\text{eff}}$决定,它有别于经典守恒律.

上述导出量子水平守恒量的方法,其显著优点在于,不必作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分. 一般来说,作出该路径积分往往是十分困难或者根本无法作出该积分.

前面导出的量子守恒律是假设系统(有效)正则作用量在(6-8-4)式变换下不变,且变换的 Jacobi 行列式为 1 的情况下得到的. 经过类似的讨论,可以得到下面一般的结果:在相应的(6-8-4)式那样的变换下,设系统的有效正则作用量的改变为

$$\Delta I^{\text{p}}_{\text{eff}} = \varepsilon_{\sigma}\int \mathrm{d}^4 x(\partial_{\mu} W^{\mu\sigma} + F^{\sigma}) \tag{6-11-12}$$

其中 $W^{\mu\sigma}$和 F^{σ} 均为正则变量等变量的函数,变换的 Jacobi 行列式为$\bar{J}[\varphi,\pi,\varepsilon]$,并记为

$$J_0^\sigma = -\left.\frac{\mathrm{i}\delta\bar{J}[\varphi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon_\sigma}\right|_{\varepsilon_\sigma=0} \tag{6-11-13}$$

那么,经过与(6-11-9)式类似的推导可得

$$\mathrm{D}\int \mathrm{d}^3x[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma} - W^{0\sigma}] = \int \mathrm{d}^3x(F^\sigma + J_0^\sigma) \tag{6-11-14}$$

可见,在这种情况下,即使有效正则作用量在整体变换下不变($F^\sigma=0$),也不导致系统的量子守恒律.这是由路径积分(泛函积分)的测度在变换下发生了改变(变换的 Jacobi 行列式不为 1)的缘故.

如果(6-11-14)式中的 $F^\sigma+J_0^\sigma=\partial_\mu F^{\mu\sigma}=\partial_0 F^{0\sigma}-\nabla\cdot\boldsymbol{F}^\sigma$,那么(6-11-14)式可写为

$$\mathrm{D}\int \mathrm{d}^3x[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma} - W^{0\sigma}] = \int \mathrm{d}^3x\partial_\mu F^{\mu\sigma} = \int \mathrm{d}^3x(\partial_0 F^{0\sigma} - \nabla\cdot\boldsymbol{F}^\sigma) \tag{6-11-15}$$

由于场在无穷远为 0,由三维 Gauss 定理得

$$\mathrm{D}\int \mathrm{d}^3x[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma} - W^{0\sigma} - F^{0\sigma}] = 0 \tag{6-11-16}$$

从而系统存在的量子守恒量为

$$Q_k^\sigma = \int \mathrm{d}^3x[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma} - W^{0\sigma} - F^{0\sigma}] = \text{const} \quad (\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{6-11-17}$$

考虑到整体变换下积分测度的变化,就非不变系统而言,虽然系统没有相应的经典守恒律,但可能存在量子守恒律.

§6-12 相互作用的声子、电子和光子系统的量子场论

电子-声子系统(极化子)是金属超导 BCS 理论的基础,当考

虑其中存在的电磁相互作用时，在§3-7中已讨论了声子场、电子场和电磁场相互作用系统的经典理论．这里进一步用路径积分方法分析该系统的量子理论，给出定域和整体量子对称性结果在此系统中的应用．

在(1＋3)维时空中，该系统的 Lagrange 量密度为[47]

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)+\psi^*(x)\Big[\mathrm{i}(\partial_0-\mathrm{i}eA_0)+\frac{1}{2m}\cdot(\nabla-\mathrm{i}e\boldsymbol{A})^2\Big]\psi(x)+\frac{1}{2}[\rho(\dot{q}(x))^2-s(\nabla q(x))^2]-V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})\psi^*(x)\psi(x) \tag{6-12-1}$$

式中 $F_{\mu\nu}$为电磁场强张量，且

$$F_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x) \tag{6-12-2}$$

$A_\mu(x)=(A_0(x),\boldsymbol{A}(x))$；$q(x)$和 $\psi(x)$分别代表声子场和电子场；$V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})$代表电子和声子相互作用势．但在 Rodriguez-Nuñez 模型中[48]，$V(x,q)=mgq$. 其中 m 为电子质量；ρ 和 s 为参量，它们可依赖于空间坐标.

场 ψ、q 和 A_μ 相应的正则共轭动量分别为

$$\left.\begin{aligned}\pi_\psi&=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\psi^*,\quad \pi_{\psi^*}=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^*}=0\\ \pi_q&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}=\rho\dot{q},\quad \pi^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu}=-F^{0\mu}\end{aligned}\right\} \tag{6-12-3}$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c=\dot{\psi}\pi_\psi+\dot{\psi}^*\pi_{\psi^*}+\pi_q\dot{q}+\pi^\mu\dot{A}_\mu-\mathscr{L}=\frac{1}{2}\pi_i^2-A_0(\partial\pi_i+e\psi^*\psi)+\frac{1}{4}F_{ik}F_{ik}+\frac{1}{2\rho}\pi_q^2+\frac{s}{2}(\nabla q)^2-\frac{1}{2m}\psi^*[(\nabla-\mathrm{i}e\boldsymbol{A})^2]\psi+V\psi^*\psi \tag{6-12-4}$$

初级约束分别为

$$\theta_1 = \pi_\psi - \mathrm{i}\psi^* \approx 0 \tag{6-12-5}$$

$$\theta_2 = \pi_{\psi*} \approx 0 \tag{6-12-6}$$

$$\Lambda_1 = \pi^0 \approx 0 \tag{6-12-7}$$

总 Hamilton 量为

$$H_\mathrm{T} = \int \mathrm{d}^3x[\mathscr{H}_\mathrm{c} + \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \mu_1\Lambda_1] \tag{6-12-8}$$

根据约束的自洽性条件$\{\theta_i, H_T\}\approx 0 (i=1,2)$，可给出Lagrange乘子 λ_i 适合的方程；由$\{\Lambda_1, H_\mathrm{T}\}\approx 0$ 可导出次级约束

$$\phi^1 = \partial_i\pi_i + \mathrm{e}\psi^*\psi \approx 0 \tag{6-12-9}$$

约束 ϕ^1 的自洽性要求不产生新的约束. 做约束 θ_1、θ_2 和 ϕ^1 的线性组合

$$\begin{aligned}\Lambda_2 = &\phi^1 + \mathrm{ie}(\theta_1\psi + \psi^*\theta_2) = \\ &\partial_i\pi_i - \mathrm{ie}(\psi\pi_\psi + \psi^*\pi_{\psi*}) \approx 0\end{aligned} \tag{6-12-10}$$

不难验证，Λ_1 和 Λ_2 为第一类约束，θ_1 和 θ_2 为第二类约束.

按 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化方案，对每一个第一类约束，需选取一规范条件. 考虑 Coulomb 规范

$$\Omega_2 = \partial_i A_i \approx 0 \tag{6-12-11}$$

Ω_2 的稳定性要求$\{\Omega_2, H_\mathrm{T}\}\approx 0$，可得另一规范约束，即

$$\Omega_1 = \partial_i\pi_i + \nabla^2 A_0 \approx 0 \tag{6-12-12}$$

系统 Green 函数在相空间中的生成泛函

$$\begin{aligned}Z[J] = &\int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi_a \prod_{i,k,l}\delta(\theta_i)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\det|\{\Lambda_k, \Omega_l\}| \cdot \\ &(\det|\{\theta_i, \theta_j\}|)^{1/2}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\pi_a\dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_\mathrm{c} + J_a\varphi^a)\right\}\end{aligned} \tag{6-12-13}$$

式中 $\varphi^a=(A_\mu,\psi,\psi^*,q)$和 $\pi_a=(\pi^\mu,\pi_\psi,\pi_{\psi^*},\pi_q)$为 φ^a 的正则动量. 这里仅对场量 φ^a 引入外源 $J_a=(J^\mu,\xi^*,\xi,\eta)$. 不难验证，式中因子 $\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|$和 $\det|\{\theta_i,\theta_j\}|$均与场量无关，这样可将它们从生成泛函(6-12-13)式中略去，并且可将(6-12-13)式写为

$$Z[J,T,X,Y]=$$

$$\int \mathscr{D}\varphi^{\alpha}\,\mathscr{D}\pi_{\alpha}\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}\mu\,\mathscr{D}\omega\,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.J_{\alpha}\varphi^{\alpha}+T_k\lambda_k+X_l\omega_l+Y_i\mu_i\right)\right\} \tag{6-12-14}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\lambda_k\Lambda_k+\omega_l\Omega_l+\mu_i\theta_i \tag{6-12-15}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\dot{\psi}\pi_{\psi}+\dot{\psi}^*\pi_{\psi^*}+\pi_q\dot{q}+\pi^{\mu}\dot{A}_{\mu}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}} \tag{6-12-16}$$

$\lambda_k(x)$、$\omega_l(x)$、$\mu_i(x)$分别为与约束 Λ_k、Ω_l、θ_i 相联系的乘子场.

当参量 ρ 依赖于坐标和场量 q 时,即使是路径积分(6-12-14)式中可积分出 π_q,其有效 Lagrange 量仍具有 δ-函数的奇异性[16].因此,在一般情形下,研究相空间中生成泛函在正则变量变换下的性质比研究位形空间中的变换性质更为基本.

首先来构造系统的规范生成元.前面已经说明,按 Dirac 处理,规范变换的生成元可以由所有第一类约束的线性组合来构成.Lagrange 量(6-12-1)式描述的系统的规范生成元可写为[23]

$$G=\int \mathrm{d}^3x\{\dot{\varepsilon}(x)\pi_0(x)-\varepsilon(x)[\partial_i\pi_i(x)-$$

$$\mathrm{ie}(\psi(x)\pi_{\psi}(x)+\psi^*(x)\pi_{\psi^*}(x))]\} \tag{6-12-17}$$

此生成元产生的变换为

$$\left.\begin{aligned}
\delta A_{\mu}(x)&=\{A_{\mu}(x),G\}=\partial_{\mu}\varepsilon(x)\\
\delta\pi^{\mu}(x)&=\{\pi^{\mu}(x),G\}=0\\
\delta\psi(x)&=\{\psi(x),G\}=\mathrm{ie}\varepsilon(x)\psi(x)\\
\delta\pi_{\psi}(x)&=\{\pi_{\psi}(x),G\}=-\mathrm{ie}\varepsilon(x)\pi_{\psi}(x)
\end{aligned}\right\} \tag{6-12-18}$$

在(6-12-18)式变换下,(6-12-16)式不变.而(6-12-15)式在(6-12-18)式变换下的变更

$$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\lambda_2\bar{\Lambda}_2(\psi^*,\pi_{\psi^*})\varepsilon(x)+$$

$$\omega_1\nabla^2\dot{\varepsilon}(x)+\omega_2\nabla^2\varepsilon(x) \tag{6-12-19}$$

其中 $\overline{\Lambda}_2$ 为 ψ^* 和 π_{ψ^*} 的函数.(6-12-18)式变换的 Jacobi 行列式为 1,生成泛函(6-12-14)式在(6-12-18)式变换下的不变性导致下列正则 Ward 恒等式:

$$\int \mathscr{D}\varphi^\alpha \mathscr{D}\pi_\alpha \mathscr{D}\lambda \mathscr{D}\mu \mathscr{D}\omega (\lambda_2 \overline{\Lambda}_2 - \nabla^2 \dot{\omega}_1 + \nabla^2 \omega_2 - \partial_\mu J^\mu + \xi^* \psi - \xi \psi + \eta q) \cdot \exp\left\{ i \int d^4 x (\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_\alpha \varphi^\alpha + T_k \lambda^k + X_l \omega_l + Y_i \mu_i) \right\} = 0 \quad (6\text{-}12\text{-}20)$$

或

$$\left(\overline{\Lambda}_2 \frac{\delta}{\delta T_2} - \nabla^2 \partial_0 \frac{\delta}{\delta X_1} + \nabla^2 \frac{\delta}{\delta X_2} - \partial_\mu J^\mu + \xi^* \frac{\delta}{\delta \xi^*} - \xi \frac{\delta}{\delta \xi} + \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) Z[J, T, X, Y] = 0 \quad (6\text{-}12\text{-}21)$$

让 $Z[J,T,X,Y]=\exp\{iW[J,T,X,Y]\}$,由泛函 Legendre 变换给出的正规顶角的生成泛函为

$$\Gamma[\varphi^\alpha, \lambda, \omega, \mu] = W[J_\alpha, T, X, Y] - \int d^4 x (J_\alpha \varphi^\alpha + T_k \lambda_k + X_l \omega_l + Y_i \mu_i) \quad (6\text{-}12\text{-}22)$$

并且

$$\frac{\delta W}{\delta J_\alpha(x)} = \varphi^\alpha(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi^\alpha(x)} = - J_\alpha(x) \quad (6\text{-}12\text{-}23\text{a})$$

$$\frac{\delta W}{\delta T_k(x)} = \lambda_k(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \lambda_k(x)} = - T_k(x) \quad (6\text{-}12\text{-}23\text{b})$$

$$\frac{\delta W}{\delta X_l(x)} = \omega_l(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \omega_l(x)} = - X_l(x) \quad (6\text{-}12\text{-}23\text{c})$$

$$\frac{\delta W}{\delta Y_i(x)} = \mu_i(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \mu_i(x)} = - Y_i(x) \quad (6\text{-}12\text{-}23\text{d})$$

利用(6-12-23)式,可将(6-12-21)式写为

$$\lambda_2 \overline{\Lambda}_2 - \nabla^2 \dot{\omega}_1 + \nabla^2 \omega_2 + \partial_\mu \left(\frac{\delta \dot{\Gamma}}{\delta A_\mu(x)} \right) + \psi(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} - \psi^*(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^*(x)} + q(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta q(x)} = 0 \quad (6\text{-}12\text{-}24)$$

将(6-12-24)式关于 $\psi(x_2)$ 和 $\psi^*(x_3)$ 求泛函微商，然后令所有场(包括乘子场)为 0，即 $A_\mu=\psi=\psi^*=q=\lambda_k=\omega_l=\mu_i=0$，于是得

$$\partial_{x_1}^\mu \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\psi^*(x_3)\delta\psi(x_2)\delta A^\mu(x_1)}=\delta(x_1-x_2)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(x_1)\delta\psi^*(x_3)}-\delta(x_1-x_3)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi^*(x_1)\delta\psi(x_2)} \tag{6-12-25}$$

对(6-12-25)式进行 Fourier 变换，得

$$q^\mu\Gamma_\mu(p,q,p+q)=S_F^{-1}(p+q)-S_F^{-1}(q) \tag{6-12-26}$$

式中：Γ_μ 是光子和电子的正规顶角；S_F 是电子的传播子.

将(6-12-24)式关于 $q(x_2)$ 和 $q(x_3)$ 求泛函微商，然后让所有场为 0，得

$$\partial_{x_1}^\mu \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta q(x_3)\delta q(x_2)\delta A^\mu(x_1)}=\delta(x_1-x_2)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta q(x_1)\delta q(x_3)}+\delta(x_1-x_3)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta q(x_1)\delta q(x_2)} \tag{6-12-27}$$

类似地，将(6-12-24)式关于场量求多次泛函微商，然后令所有场量为 0，可得正规顶角的多种形式的 Ward 恒等式. 导出这些正规顶角的 Ward 恒等式的显著优点，在于无需作出相空间路径积分中关于正则动量的积分. 这也正是与传统研究不同的地方.

下面讨论系统整体对称性导致的量子守恒律. 显然，系统的有效正则 Lagrange 量(6-12-15)式在空间平移下不变，平移变换的 Jacobi 行列式为 1. 且 $\tau^{0\sigma}=0$. 由(6-11-11)式可得量子理论中的动量 $\boldsymbol{p}$ 守恒，即

$$\boldsymbol{p}=-\int \mathrm{d}^3x(\pi^\mu\nabla A_\mu+\pi_\psi\nabla\psi+\pi_q\nabla q) \tag{6-12-28}$$

有效正则作用量的时间平移不变性，$\tau^{i\sigma}=0\,(i=1,2,3)$，由(6-11-11)式可得，在约束超曲面上(包括规范约束)量子守恒的能量

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} - \frac{1}{2m}\psi^* [(\nabla - ie\boldsymbol{A})^2]\psi + \frac{1}{2\rho}\pi_q^2 + \frac{1}{2}s(\nabla q)^2 + V\psi^*\psi \right\} \tag{6-12-29}$$

在空间转动变换下，矢量场 A_μ 和单分量场 $\psi(x)$、$\psi^*(x)$ 以及 $q(x)$ 变换的 Jacobi 行列式为 1，且 $\tau^{0\sigma}=0$. 根据场的变换性质和(6-11-11)式，得量子守恒角动量

$$M_{jk} = \int d^3x \left\{ \pi^\mu \left(x_k \frac{\partial A_\mu}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial A_\mu}{\partial x_k} \right) + \pi^\mu (\Sigma_{jk})_{\mu\nu} A^\nu + \pi_\psi \left(x_k \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) + \pi_q \left(x_k \frac{\partial q}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial q}{\partial x_k} \right) \right\} \tag{6-12-30}$$

式中[49]

$$(\Sigma_{\rho\sigma})_{\mu\nu} = g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} \tag{6-12-31}$$

系统的有效正则作用量在下列整体规范变换下不变，即

$$\psi'(x) = e^{-ie\varepsilon}\psi(x), \quad \pi'_\psi(x) = e^{ie\varepsilon}\pi_\psi(x)$$

由(6-11-11)式得电荷

$$Q = e\int d^3x \psi^*(x)\psi(x) \tag{6-12-32}$$

守恒.

量子守恒量(6-12-28)、(6-12-30)、(6-12-32)式与从正则 Noether 定理导出的经典守恒量相同.

下面来构造由 Lagrange 量(6-12-1)式描述的系统在位形空间中的生成泛函. 对于(6-12-1)式中 ρ 为常数的情形，相空间中生成泛函(6-12-14)式对动量 π_q 可以积出，其结果不出现 δ-函数的奇异性[16]. 将(6-12-14)式重写为

$$Z[J^\mu, \xi^*, \xi, \eta] = \int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\pi^\mu \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\pi_\psi \mathscr{D}\psi^* \mathscr{D}\pi_{\psi^*} \mathscr{D}q \cdot \mathscr{D}\pi_q \prod_{i,k,l} \delta(\theta_i)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l) \cdot$$

$$\exp\left\{i\int d^4x(\pi^\mu \dot{A}_\mu + \dot{\psi}\pi_\psi + \dot{\psi}^*\pi_{\psi^*} + \right.$$

$$\left.\pi_q \dot{q} - \mathscr{H}_c + J^\mu A_\mu + \xi^*\psi + \psi^*\xi + \eta q)\right\} \quad (6\text{-}12\text{-}33)$$

在(6-12-33)式中,对 A_0、π^0、π_ψ 和 π_{ψ^*} 进行积分,然后将 $\delta[\partial_i\pi_i - \mathrm{ie}(\psi\pi_\psi+\psi^*\pi_{\psi^*})]$表示为如下泛函积分的形式:

$$\delta[\partial_i\pi_i - \mathrm{ie}(\psi\pi_\psi + \psi^*\pi_{\psi^*})] = \exp\left\{-i\int d^4x A_0[\partial_i\pi_i - \right.$$

$$\left.\mathrm{ie}(\psi\pi_\psi + \psi^*\pi_{\psi^*})]\mathscr{D}A_0\right\} \quad (6\text{-}12\text{-}34)$$

而(6-12-33)式中剩下的对动量的积分均为 Gauss 型,积分后就将相空间中的生成泛函化为位形空间中的生成泛函,得

$$Z[J^\mu,\xi^*,\xi,\eta] = \int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\psi^* \mathscr{D}q\,\delta(\partial_i A_i)\cdot$$

$$\exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L} + J^\mu A_\mu + \xi^*\psi + \psi^*\xi + \eta q)\right\} \quad (6\text{-}12\text{-}35)$$

或

$$Z[J^\mu,\xi^*,\xi,\eta] =$$

$$\int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\psi^* \mathscr{D}q \exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + \right.$$

$$\left.J^\mu A_\mu + \xi^*\psi + \psi^*\xi + \eta q)\right\} \quad (6\text{-}12\text{-}36)$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L} - \frac{1}{2\alpha_0}(\partial_i A_i)^2 \quad (6\text{-}12\text{-}37)$$

其中 $\mathscr{L}$ 为原始 Lagrange 量;α_0 为规范参数.有效 Lagrange 量有别于原始 Lagrange 量,是因为系统存在约束所带来的量子效应.

利用路径积分方法传统的技巧[50],从位形空间生成泛函出发,同样可以导出 Ward 恒等式(6-12-25)、(6-12-27)式.

众所周知,在树图近似下正规顶角的生成泛函 Γ 等于位形空间中的有效作用量,即

$$\Gamma = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \int \mathrm{d}^4 x \left[\mathscr{L} - \frac{1}{2\alpha_0} (\partial_i A_i)^2 \right] \quad (6\text{-}12\text{-}38)$$

从(6-12-38)式出发立即可导出由 Lagrange 量(6-12-1)式描述的系统的 Feynman 规则.

§ 6-13　含 Hopf 项和 Chern-Simons 项的非线性 σ-模型

近年来讨论了 Lagrange 量中含 Chern-Simons 项的(1+2)维时空规范理论,其中所呈现出的分数自旋和分数统计性[31,32],这在解释量子 Hall 效应和高温超导中有重要意义[33]. 文献[32]中讨论了含 Hopf 项和 Chern-Simons 项的(1+2)维时空非线性 σ-模型,分析了角动量具有分数自旋性质,对此问题这里将进一步讨论. 首先,该文中对角动量的计算是基于经典 Noether 定理,其结果在量子理论中是否有效?第二,辐射规范条件与系统的运动方程不自洽. 第三,对恰当的规范条件,其 Faddeev-Popov 行列式有待进一步分析. 这里采用路径积分量子化,对存在分数自旋在量子理论中给予了严格的阐明.

含 Hopf 项和 Chern-Simons 项非线性 σ-模型的 Lagrange 量密度[32]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2f} (\partial_\mu n^a)^2 - \frac{\theta}{4\pi} A_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \varepsilon^{abc} n^a \partial_\nu n^b \partial_\lambda n^c + \theta \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \quad (6\text{-}13\text{-}1)$$

式中 $(n^a)^2 = 1 (a = 1,2,3)$;f 和 θ 为参量. 矢量场 A_μ 的 Lagrange 方程为

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda = J^\mu \quad (6\text{-}13\text{-}2)$$

式中

$$J^\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \varepsilon^{abc} n^a \partial_\nu n^b \partial_\lambda n^c \quad (6\text{-}13\text{-}3)$$

场 n^a 和 A^μ 的正则共轭动量分别记为 π^a 和 π_μ,

$$\pi^a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{n}^a} = \dot{n}^a - \frac{\theta}{2\pi}\varepsilon^{ij} A_i \varepsilon^{abc} n^b \partial_j n^c \tag{6-13-4a}$$

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0 \tag{6-13-4b}$$

$$\pi_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^i} = \theta \varepsilon_{ij} A^j \tag{6-13-4c}$$

式中 $\varepsilon^{ij}=\varepsilon^{0ij}$. 初级约束分别为

$$\Lambda_1 = \pi_0 \approx 0 \tag{6-13-5a}$$

$$\theta_1 = \pi_1 - \theta A_2 \approx 0 \tag{6-13-5b}$$

$$\theta_2 = \pi_2 + \theta A_1 \approx 0 \tag{6-13-5c}$$

$$\theta_3 = (n^a)^2 - 1 \approx 0 \tag{6-13-5d}$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_c = & \pi^a \dot{n}^a + \pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathscr{L} = \\ & \frac{1}{2}(\pi^a)^2 - \frac{\theta^2}{8\pi^2}(\varepsilon^{ij}\varepsilon^{abc} A_i n^b \partial_j n^c)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i n^a)^2 - \\ & \theta\varepsilon^{ij}(A_0 \partial_i A_j + A_i \partial_j A_0) + \frac{\theta}{4\pi}\varepsilon^{ij}\varepsilon^{abc}\Big[A_0 n^a \partial_i n^b \partial_j n^c + \\ & 2A_i n^a \partial_j n^b \left(\pi^c + \frac{\theta}{2\pi}\varepsilon^{lm}\varepsilon^{cde} A_l n^d \partial_m n^e\right)\Big] \end{aligned} \tag{6-13-6}$$

总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}} = \int \mathrm{d}^2 x (\mathscr{H}_c + \lambda\pi_0 + \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3) \tag{6-13-7}$$

由初级约束的自洽性条件 $\{\Lambda_1, H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$ 和 $\{\theta_3, H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$,分别导出次级约束

$$\Lambda_2 = 2\theta(\varepsilon^{ij}\partial_i A_j - J_0) \approx 0 \tag{6-13-8}$$

$$\theta_4 = n^a \pi^a \approx 0 \tag{6-13-9}$$

其中 J_0 由(6-13-3)式给出. 初级约束 θ_1 和 θ_2 的自洽性条件,给出确定乘子 μ_1 和 μ_2 的方程. 次级约束的自洽性条件不再产生新的约束. 不难验证,Λ_1 和 Λ_2 为第一类约束,θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 为第二类

约束.

按约束系统的 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化方法，对每一个第一类约束，需选取一个相应的规范条件. 文献[32]中采用辐射规范，即 $\partial_i A_i \approx 0$，$A_0 \approx 0$. 对此模型，这两个条件不能同时成立. 因为规范条件不仅必须能固定规范并为动力学系统的演化所保持，而且还应当与系统的运动方程自洽. 由运动方程(6-13-2)式，有

$$A_\lambda = \frac{1}{2\Box}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu J^\mu \qquad (6\text{-}13\text{-}10)$$

或

$$A_\lambda(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\int d^2y\, G(x,y)\partial^\nu J^\mu(y) \qquad (6\text{-}13\text{-}11)$$

其中

$$\Box G(x,y) = \delta^{(2)}(x-y) \qquad (6\text{-}13\text{-}12)$$

可见，$A_0 \approx 0$ 与(6-13-11)式不自洽.

由库仑规范 $\Omega_1 = \partial_i A_i \approx 0$ 的自洽性要求，即由 $\partial_i \dot{A}_i = 0$ 给出的另一规范约束为

$$\Omega_2 = \nabla^2 A_0 - \varepsilon_{ij}\partial^i J^j \approx 0 \qquad (6\text{-}13\text{-}13)$$

因此，对此模型应该用 $\Omega_2 \approx 0$ 来代替辐射规范中的 $A_0 \approx 0$.

不难看出，$\det|\{\Lambda_k, \Omega_l\}|$ 与场量无关，可以从生成泛函中略去. 通过对 $\det|\{\theta_i, \theta_j\}|$ 的计算，可求出相应的

$$\mathscr{L}_{gh} = 8\theta\bar{C}(x)(n^a(x))^2 C(x) \qquad (6\text{-}13\text{-}14)$$

这样对此模型，Green 函数在相空间中的生成泛函为

$$Z[J_a, J_\mu, K^a, K^\mu] = \int \mathscr{D}n^a\, \mathscr{D}\pi_a\, \mathscr{D}A_\mu\, \mathscr{D}\pi_\mu \cdot \exp\left\{ i\int d^4x \left(\mathscr{L}_{eff}^p + J_a n^a + J_\mu A^\mu + K^a\pi_a + K^\mu\pi_\mu \right) \right\} \qquad (6\text{-}13\text{-}15)$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \mathscr{L}_m + \mathscr{L}_{\text{gh}} \tag{6-13-16}$$

$$\mathscr{L}_m = \lambda_k \Lambda_k + \lambda_l \Omega_l + \lambda_i \theta_i \tag{6-13-17}$$

$$\mathscr{L}^{\text{p}} = \pi_a \dot{n}^a + \pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathscr{H}_{\text{c}} \tag{6-13-18}$$

在空间转动下，有效正则作用量不变，且矢量场 $A^\mu(x)$ 和标量场 $n^a(x)$ 变换的 Jacobi 行列式为 1，此时，$\tau^{0\sigma}=0$，又 $\mathscr{L}_{\text{gh}}$ 不含场的微商，对正则动量无贡献. 在 (x_i,x_j) 平面内的转动下，由量子守恒律的一般形式：

$$Q^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3x \left[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}\right]$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{6-13-19}$$

可得量子守恒量

$$M^{ij} = \int \mathrm{d}^2x\pi\left(x^i \frac{\partial}{\partial x_j} - x^j \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathrm{D}^{ij}\right)\varphi$$

$$(\varphi = (A,n)) \tag{6-13-20}$$

式中 D^{ij} 与场属于 Lorentz 群的表达式(矢量表示、旋量表示等)有关[49]. 由(6-13-20)式可得到量子水平的守恒角动量与经典的正则形式的 J^c 相同[32]，它含场的轨道角动量和矢量场的自旋角动量. 由于存在涡旋，其边界项给出分数自旋项[32]. 这里在量子理论中对系统的角动量及其分数自旋性质作了精确讨论. 文献[31,51]及其他一些文献中也存在类似的由经典 Noether 定理给出系统动量和角动量的问题，亦可以同样在量子理论中予以讨论.

Abel Chern-Simons 项与物质场耦合，是研究分数自旋的基础模型. 考虑 Abel Chern-Simons 项与复标量场耦合的 Lagrange 量密度[31]

$$\mathscr{L} = (\mathrm{D}_\mu\phi)^*(\mathrm{D}_\mu\phi) + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda \tag{6-13-21}$$

其中 $\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}A_\mu$. 在相空间描述时系统存在如下约束(见§3-4)：

$$\Lambda_1 = \pi_0 \approx 0 \tag{6-13-22}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j - J_0 \approx 0 \tag{6-13-23}$$

$$\theta_i = \pi_i - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}A^j \approx 0 \quad (i,j=1,2) \tag{6-13-24}$$

式中：π_μ 为 A^μ 的正则共轭动量；$\varepsilon^{ij}=\varepsilon^{0ij}$；$J_0=\mathrm{i}(\pi\phi-\phi^*\pi^*)$；$\pi(\pi^*)$ 是 $\phi(\phi^*)$的正则共轭动量. 不难验证，Λ_1 和 Λ_2 为第一类约束，θ_i 为第二类约束. 采用 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化方案，规范条件（见 § 4-6）可取为

$$\Omega_1 = \partial_i A^i \approx 0 \tag{6-13-25}$$

$$\Omega_2 = \nabla^2 A_0 - \frac{2\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij}\partial^i J^i \approx 0 \tag{6-13-26}$$

式中

$$J^\mu = -\mathrm{i}\phi^* \mathrm{D}^\mu\phi + \mathrm{i}(\mathrm{D}^\mu\phi^*)\phi \tag{6-13-27}$$

此时，Green 函数的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\phi\, \mathscr{D}\pi\, \mathscr{D}\phi^*\, \mathscr{D}\pi^*\, \mathscr{D}A_\mu\, \mathscr{D}\pi^\mu \prod_{j,k,l}\delta(\theta_j)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\cdot$$
$$\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(J\phi + J^*\phi^* + J^\mu A_\mu)\right\} \tag{6-13-28}$$

式中：I^{p} 为系统的正则作用量；J、J^*、J^μ 分别为场量 ϕ、ϕ^*、A_μ 的外源. 不难验证，PoissION 括号 $\{\Lambda_k,\Omega_l\}$ 以及 $\{\theta_i,\theta_j\}$ 均与场量无关，可以从生成泛函中略去（无需引入鬼场）. 利用 δ-函数的性质，可将生成泛函写为

$$Z[J,\xi] = \int \mathscr{D}\phi\, \mathscr{D}\pi\, \mathscr{D}\phi^*\, \mathscr{D}\pi^*\, \mathscr{D}A_\mu\, \mathscr{D}\pi^\mu\, \mathscr{D}\lambda_m\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} + J\phi + J^*\phi^* +\right.$$
$$\left. J^\mu A_\mu + \xi_m\lambda_m)\right\} \tag{6-13-29}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{P}} = \mathscr{L}^{\text{P}} + \mathscr{L}_m = \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{H}_c + \lambda_j\theta_j + \lambda_k\Lambda_k + \lambda_l\Omega_l \tag{6-13-30}$$

$\lambda_m = (\lambda_j, \lambda_k, \lambda_l)$代表乘子场；$\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量密度；ξ_m 为乘子场的外源.

与前面完全类似的讨论可知，空间转动不变性导致的系统量子守恒角动量与经典 Noether 定理给出的结果相同. 文献[31]从经典 Noether 定理出发计算了系统的角动量，讨论了其分数自旋性质. 由上所述可知，此性质在量子理论中仍然保持.

§6-14 杨-Mills 理论中的应用

纯杨-Mills 场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \tag{6-14-1}$$

式中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \tag{6-14-2}$$

其中 $F_{\mu\nu}^a$中的耦合常数 g 已省略. Lagrange 量(6-14-1)式是奇异的，系统在相空间的约束为

$$\Lambda_a^1 = \pi_a^0 \approx 0 \tag{6-14-3}$$

$$\Lambda_a^2 = \partial_i \pi_a^i - f_{bc}^a A_i^b \pi_c^i \approx 0 \tag{6-14-4}$$

式中：π_a^μ 为 A_μ^a 的正则共轭动量；"≈"代表弱等，它表示等式在约束确定的超曲面上成立；Λ_a^1 和 Λ_a^2 均为第一类约束. 规范条件取为[37]

$$\Omega_1^a = \partial_i \pi_i^a + \nabla^2 A_0^a - f_{bc}^a A_i^b \partial^i A_0^c \approx 0 \tag{6-14-5}$$

$$\Omega_2^a = \partial^i A_i^a \approx 0 \tag{6-14-6}$$

Green 函数在相空间中的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \delta(\Lambda_a^1)\delta(\Lambda_a^2)\delta(\Omega_1^a)\delta(\Omega_2^a)\det|\{\Lambda_k, \Omega^l\}| \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\pi_a^\mu \dot{A}_c^a - \mathscr{H}_c + J_a^\mu A_\mu^a)\right\} \tag{6-14-7}$$

其中 $\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量密度. 因子 $\det|\{\Lambda_k,\Omega^l\}|\delta(\partial^i A_i^a)$ 可用 $\det M_l\delta(\partial^\mu A_\mu^a)$ 来代替[37]，而

$$M_L = (\delta_b^a\partial^\mu\partial_\mu + f_{bc}^a A_\mu^c\partial^\mu)\delta(x-y) \qquad (6\text{-}14\text{-}8)$$

由于理论规范无关[37]，用 $\overline{\Omega}_l^a=\Omega_l^a-p_l^a(x)$ 代替 Ω_l^a，生成泛函不变，用 $\exp\left[-\frac{1}{2a_l}\int d^4x(p_l^a)^2\right]$ 乘(6-14-7)式后，做关于 $p_l^a(x)$ 的路径积分，略去无关紧要因子得

$$Z[J,\bar{\zeta},\zeta,\xi] = \int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\pi_a^\mu\mathscr{D}\lambda_k^a\mathscr{D}\overline{C}^a\mathscr{D}C^a\exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_a^\mu A_\mu^a + \bar{\zeta}^a C^a + \overline{C}^a\zeta^a + \xi^a\lambda_k^a)\right\} \qquad (6\text{-}14\text{-}9)$$

式中：$\bar{\zeta}^a$ 和 ζ^a 分别为鬼场 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的外源；ξ_k^a 为乘子场 λ_k^a 的外源，

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \mathscr{L}_{\text{fix}} + \mathscr{L}_{\text{gh}} + \mathscr{L}'_m \qquad (6\text{-}14\text{-}10a)$$

$$\mathscr{L}^{\text{p}} = \pi_a^\mu\dot{A}_\mu^a - \mathscr{H}_c \qquad (6\text{-}14\text{-}10b)$$

$$\mathscr{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\alpha_2}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \qquad (6\text{-}14\text{-}10c)$$

$$\mathscr{L}_{\text{gh}} = -\partial^\mu\overline{C}^a D_{b\mu}^a C^b \quad (D_{b\mu}^a = \delta_b^a\partial_\mu + f_{bc}^a A_\mu^c) \qquad (6\text{-}14\text{-}10d)$$

$$\mathscr{L}'_m = \lambda_k^a\Lambda_a^k - \frac{1}{2\alpha_1}(\Omega_1^a)^2 \qquad (6\text{-}14\text{-}10e)$$

在 BRS 变换(τ 为 Grassmann 参数)

$$\delta A_\mu^a = -\tau D_{b\mu}^a C_b \qquad (6\text{-}14\text{-}11a)$$

$$\delta\pi_a^\mu = \tau f_{bc}^a\pi_c^\mu C_b \qquad (6\text{-}14\text{-}11b)$$

$$\delta C^a = \frac{1}{2}\tau f_{bc}^a C_b C_c \qquad (6\text{-}14\text{-}11c)$$

$$\delta\overline{C}^a = -\frac{1}{\alpha_2}\tau\partial^\mu A_\mu \qquad (6\text{-}14\text{-}11d)$$

下，$\delta(D_{b\mu}^a C_b)=0$，$\delta(\delta C^a)=0$[45]，对 δA_μ^a 和 δC^a 引入相应的外源 u_a^μ 和 v^a，将生成泛函写为

$$Z[J,\bar{\zeta},\zeta,\xi,u,v] = \int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\pi_a^\mu\mathscr{D}\lambda_k^a\mathscr{D}\overline{C}^a\mathscr{D}C^a\cdot$$
$$\exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_a^\mu A_\mu^a + \bar{\zeta}^a C^a + \overline{C}^a\zeta^a +\right.$$

$$\xi_k \lambda_k^a + u_a^\mu \delta A_\mu^a + v^a \delta C^a) \Big\} \tag{6-14-12}$$

在(6-14-11)式变换下，$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$是不变的.(6-14-11a)、(6-14-11b)式是第一类约束作为规范生成元所产生的变换，它不会离开约束超曲面[8]. 因此，在上述变换下，$\delta\mathscr{L}'_m \approx 0$. 这样，在(6-14-11)式变换下，$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} \approx 0$. (6-12-11)式变换的 Jacobi 行列式为 1，生成泛函(6-14-12)式在(6-14-11)式变换下不变，就有

$$\int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \mathscr{D}\lambda_k^a \mathscr{D}\bar{C}^a \mathscr{D}C^a \Big[\int \mathrm{d}^4 x (J_a^\mu \delta A_\mu^a + \bar{\zeta}^a \delta C^a + \delta \bar{C}^a \zeta^a) \Big] \cdot \exp\Big\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a^\mu A_\mu^a + \bar{\zeta}^a C^a + \bar{C}^a \zeta + \xi_k^a \lambda_k^a + u_a^\mu \delta A_\mu^a + v^a \delta C^a) \Big\} = 0 \tag{6-14-13}$$

由此得到的 Green 函数的 Ward-Takahashi 恒等式为

$$\int \mathrm{d}^4 x \Big[J_a^\mu \frac{\delta}{\delta u_a^\mu} - \bar{\zeta}^a \frac{\delta}{\delta v^a} - \frac{1}{\alpha_2} \zeta^a \partial_\mu \Big(\frac{\delta}{\delta J_\mu^a} \Big) Z[J, \bar{\zeta}, \zeta, \xi, u, v] = 0 \tag{6-14-14}$$

在(6-14-11)式变换下，沿着约束决定的超曲面上，有效正则作用量不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1. 由量子守恒律

$$Q^\sigma = \int \mathrm{d}^3 x [\pi (\xi^\sigma - \varphi_{,k} \tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}} \tau^{0\sigma}] \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, r) \tag{6-14-15a}$$

得系统的量子 BRS 守恒荷为

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x (\pi_a^\mu \delta A_\mu^a + \bar{\pi}_a \delta C^a + \delta \bar{C}^a \pi_a) \tag{6-14-15b}$$

式中 $\bar{\pi}^a$ 和 π_a 分别为 C^a 和 $\bar{C}^a$ 的正则动量. 这样，不必作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，即可导出 BRS 变换下的 Ward-Takahashi 恒等式和量子水平的 BRS 守恒量.

在整体变换

$$C^{a\prime}(x) = C^a(x) + \mathrm{i}\epsilon^\nu (T_\sigma)_b^a C^b(x) A_\nu^\sigma(x) \tag{6-14-16a}$$

$$\bar{C}^{a\prime}(x) = \bar{C}^a(x) - \mathrm{i}\epsilon^\nu \bar{C}^b(x) (T_\sigma)_b^a A_\nu^\sigma(x) +$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\Box}\varepsilon^{\nu}\partial_{\mu}\left[\bar{C}^{b}(x)(T_{\sigma})_{b}^{a}\partial^{\mu}A_{\nu}^{\sigma}(x)\right] \quad (6\text{-}14\text{-}16\text{b})$$

$$A_{\mu}^{a\prime}(x)=A_{\mu}^{a}(x)+\varepsilon^{\nu}\mathrm{D}_{\sigma\mu}^{a}A_{\nu}^{\sigma}(x) \quad (6\text{-}14\text{-}16\text{c})$$

$$\pi_{a}^{\mu\prime}(x)=\pi_{a}^{\mu}(x)+\varepsilon^{\nu}f_{\sigma c}^{a}\pi_{c}^{\mu}(x)A_{\nu}^{\sigma}(x) \quad (6\text{-}14\text{-}16\text{d})$$

下，$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$不变[8]. 其中 ε^{ν} 为参数；T_{σ} 为规范群生成元的矩阵，(6-14-16b)式又可写为

$$\bar{C}^{a\prime}(x)=\bar{C}^{a}(x)-\mathrm{i}\varepsilon^{\nu}\bar{C}^{b}(x)(T_{\sigma})_{b}^{a}A_{\nu}^{\sigma}(x)+\varepsilon^{\nu}\int\mathrm{d}^{4}y\Delta_{0}(x,y)\cdot$$
$$\partial_{\mu}\left[\bar{C}^{b}(y)(T_{\sigma})_{b}^{a}\partial^{\mu}A_{\nu}^{\sigma}(y)\right] \quad (6\text{-}14\text{-}16\text{c}')$$

式中

$$\Box\Delta_{0}(x,y)=\mathrm{i}\delta^{4}(x-y) \quad (6\text{-}14\text{-}17)$$

设 $\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}+\mathscr{L}'_{m}$ 在(6-14-16)式变换下的变更记为

$$\delta(\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}+\mathscr{L}'_{m})=\varepsilon^{\nu}F_{\nu}(A,\pi)$$

变换(6-14-16)式的 Jacobi 行列式为 1，由整体变换下的正则 Ward 恒等式

$$\int\mathrm{d}^{4}x\left[F^{\sigma}+J\left(\xi^{\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\partial_{\mu}\left(\tau^{\mu\sigma}J\frac{\delta}{\delta J}\right)\right]_{\substack{\pi\to\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}\\ \varphi\to-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J}}}Z[J]=0 \quad (6\text{-}14\text{-}18\text{a})$$

得

$$\int\mathrm{d}^{4}x\left\{F_{\nu}-\partial_{\mu}J_{a}^{\mu}\frac{\delta}{\delta J_{a}^{\nu}}-\mathrm{i}f_{\sigma c}^{a}J_{a}^{\mu}\frac{\delta}{\delta J_{c}^{\mu}}\frac{\delta}{\delta J_{\sigma}^{\nu}}+\right.$$
$$\bar{\zeta}_{a}(T_{\sigma})_{b}^{a}\frac{\delta}{\delta\bar{\zeta}_{b}}\frac{\delta}{\delta J_{\sigma}^{\nu}}-\mathrm{i}\zeta_{a}(T_{\sigma})_{b}^{a}\frac{\delta}{\delta\zeta_{b}}\frac{\delta}{\delta J_{\sigma}^{\nu}}+$$
$$\left.\frac{1}{\Box}\partial_{\mu}\left[\frac{\delta}{\delta\zeta_{b}}(T_{\sigma})_{b}^{a}\zeta_{a}\partial^{\mu}\frac{\delta}{\delta J_{\sigma}^{\nu}}\right]\right\}Z[J_{a}^{\mu},\xi_{k}^{a},\bar{\zeta}^{a},\zeta^{a}]=0 \quad (6\text{-}14\text{-}18\text{b})$$

令 $Z[J_{a}^{\mu},\xi_{k}^{a},\bar{\zeta}^{a},\zeta^{a}]=\exp\{\mathrm{i}W[J_{a}^{\mu},\xi_{k}^{a},\bar{\zeta}^{a},\zeta^{a}]\}$，按寻常方法通过泛函 Legendre 变换，将 $W[J_{a}^{\mu},\xi_{k}^{a},\bar{\zeta}^{a},\zeta^{a}]$换为正规顶角的生成泛函

$\Gamma[A_\mu^a,\lambda_k^a,C^a,\overline{C}^a]$，这样(6-14-18b)式可写为

$$\int \mathrm{d}^4x\Big\{F_\nu - A_\nu^\sigma\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^\sigma} - \mathrm{i}f_{\sigma c}^a A_\nu^\sigma A_\mu^c\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} +$$

$$A_\nu^\sigma C^a(T_\sigma)_b^a\frac{\delta\Gamma}{\delta C^b} - A_\nu^\sigma\overline{C}^a(T_\sigma)_b^a\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{C}^b} +$$

$$A_\nu^\sigma\partial^\mu\Big[\partial_\mu\Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{C}^a}\frac{1}{\Box}\Big)(T_\sigma)_b^a\overline{C}^b\Big]\Big\} = 0 \qquad (6\text{-}14\text{-}19)$$

将(6-14-19)式关于 $A_\lambda(x_1)$、$C^e(x_2)$和 $\overline{C}^f(x_3)$求泛函微商，并让所有场为 0，可得(6-5-48)式那样的规范场-鬼场正规顶角的 Ward 恒等式.

其次，变换(6-14-16c)、(6-14-16d)式是第一类约束作为规范生成元所产生的变换，在此规范变换下，第一类约束(6-14-3)、(6-14-4)式不会离开约束超曲面[8]. 因此，在(6-14-16)式变换下，

$$\delta\mathscr{L}'_m\approx 0,\delta\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}\approx 0$$

也就是说，在沿着约束(包括规范约束)所确定的超曲面上，有效正则作用量不变，由(6-14-15a)式可得系统的量子守恒量[41]，即

$$Q_\nu = \int\mathrm{d}^3x\Big\{\pi_a^\mu D_{b\mu}^a A_\nu^b + \mathrm{i}\pi_a(T_\sigma)_b^a C^b A_\nu^\sigma - \mathrm{i}\overline{\pi}_a\overline{C}^b(T_\sigma)_b^a A_\nu^\sigma +$$

$$\pi_a\int\mathrm{d}^4y\Delta_0(x,y)\partial_\mu[\overline{C}^b(y)(T_\sigma)_b^a\partial^\mu A_\nu^\sigma(y)]\Big\} \qquad (6\text{-}14\text{-}20)$$

式中 π_a^μ、π_a 和 $\overline{\pi}_a$ 分别为 A_μ^a、C^a 和 $\overline{C}^a$ 的正则共轭动量，其中

$$\pi_a^\mu = -F_a^{0\mu},\ \pi_a = -\overline{C}^a,\ \overline{\pi}_a = D_{b0}^a C^b \qquad (6\text{-}14\text{-}21)$$

最后，有效正则作用量在鬼场的标度变换

$$C^a(x)\to \mathrm{e}^\theta C^a(x),\ \overline{C}^a(x)\to \mathrm{e}^{-\theta}\overline{C}^a(x) \qquad (6\text{-}14\text{-}22)$$

下不变，其中 θ 为数值参数，且变换的 Jacobi 行列式为 1，由(6-14-15a)式得到系统的量子守恒量

$$Q_{\mathrm{gh}} = \int\mathrm{d}^3x\overline{\pi}^a(\overleftrightarrow{\partial}^0\delta_b^a + f_{eb}^a A^{0e})C^b$$

这与用所谓有效Lagrange量理论导致的结果相同[11]. 从分析相空间路径积分中的正则对称性导出的Ward恒等式和量子守恒

律，其显著优点是不必作出路径积分中对正则动量的积分，因而具有普遍的意义.

§6-15 非 Abel Chern-Simons 理论中的应用

从相空间中系统对称性的分析，建立了约束 Hamilton 系统经典理论的正则 Noether 定理，并且推广到量子理论中. 本节给出了理论在非 Abel Chern-Simons 理论中的应用.

在(1+2)维时空含 Chern-Simons 项与物质场耦合的 Lagrange 量所描述的系统，对 Abel Chern-Simons 理论中呈现出分数自旋和分数统计性质，这在解释分数量子 Hall 效应乃至高温超导有重要意义. 在 Chern-Simons 项与物质场耦合的现有理论中，某些基本问题有待进一步研究. 例如：在 Hamilton 分析中利用经典场方程并选取规范条件消去规范场，而忽略了对约束的处理，在量子理论中其结果是否与原有模型等价[52]. 又例如：关于任意子角动量的讨论中，均是基于经典 Noether 定理计算的，其结果在量子水平上是否有效，值得仔细研究. 前面已说明对一些 Abel Chern-Simons 模型，在量子理论中仍然呈现出分数自旋性质. 近来一些作者讨论了非 Abel Chern-Simons 理论中的经典角动量[34,35]，并指出了非 Abel Chern-Simons 项存在，可改变系统的自旋统计性质. 这里，将在量子理论中研究这个问题，并分别讨论非 Abel Chern-Simons 项与标量场耦合以及与旋量场耦合的情形.

首先，考虑(1+2)维时空非 Abel Chern-Simons 项和标量场耦合的系统. 其 Lagrange 量[53]

$$\mathscr{L} = (\mathrm{D}_\mu\phi)^+ (\mathrm{D}^\mu\phi) + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a + \frac{1}{3} f_{bc}^a A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c \right) \tag{6-15-1}$$

式中：ϕ 为多分量的标量场；$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}T^a A_\mu^a$，$T^a$ 为规范群生成

元，$[T^a, T^b]=\mathrm{i}f^a_{bc}T^c$；$\mathrm{tr}(T^aT^b)=\delta^{ab}/2$. 理论的规范不变性要求参数$\kappa=n/4\pi$($n$ 为整数)[36]. 场 $A^a_\mu(x)$、$\phi(x)$、$\phi^+(x)$的正则动量分别为

$$\pi^a_0 \approx 0, \quad \pi^a_i = \frac{\kappa}{2}\varepsilon_{ij}A^{ja} \tag{6-15-2}$$

$$\pi = (\mathrm{D}_0\phi)^+, \quad \pi^+ = (\mathrm{D}_0\phi) \tag{6-15-3}$$

这里约定 $\varepsilon^{012}=\varepsilon^{12}=1$. (6-15-2)式为初级约束. 正则 Hamilton 量

$$H_c = \int \mathrm{d}^2x \mathscr{H}_c = \int \mathrm{d}^2x[\pi\pi^+ + (\mathrm{D}_i\phi)^+(\mathrm{D}_i\phi)] - A^a_0\left(\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{ij}F^a_{ij} + J^a_0\right) \tag{6-15-4}$$

式中

$$F^a_{ij} = \partial_i A^a_j - \partial_j A^a_i + f^a_{bc}A^b_iA^c_j$$

$$J^a_0 = -\mathrm{i}(\pi T^a\phi - \phi^+ T^a\pi^+)$$

总 Hamilton 量

$$H_\mathrm{T} = \int \mathrm{d}^2x\left[\mathscr{H}_c + \lambda^a\pi^a_0 + \lambda^a_i\left(\pi^a_i - \frac{\kappa}{2}\varepsilon_{ij}A^{ja}\right)\right] \tag{6-15-5}$$

由初级约束 $\pi^a_0 \approx 0$ 的自洽性条件 $\{\pi^a_0, H_\mathrm{T}\} \approx 0$，导出次级约束

$$\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{ij}F^a_{ij} + J^a_0 \approx 0 \tag{6-15-6}$$

由其他的初级约束的自洽性条件导致的方程来确定 Lagrange 乘子 λ^a_i. 次级约束(6-15-6)式的自洽性条件不产生新的约束. 与 Abel Chern-Simons 理论相似，做约束的线性组合，并记

$$\Lambda^a_0 = \pi^a_0 \approx 0 \tag{6-15-7}$$

$$\Lambda^a_1 = (\mathrm{D}_i\pi^i)^a + J^a_0 + \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A^a_j \approx 0 \tag{6-15-8}$$

$$\theta^a_i = \pi^a_i - \frac{\kappa}{2}\varepsilon_{ij}A^{ja} \approx 0 \tag{6-15-9}$$

不难验证，Λ^a_0 和 Λ^a_1 为第一类约束，θ^a_i 为第二类约束.

按约束 Hamilton 系统的 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子

化理论，对每一个第一类约束，需选取一个规范条件．考虑 Coulomb 规范

$$\overline{\Omega}_2^a = \partial^i A_i^a \approx 0 \tag{6-15-10}$$

$\overline{\Omega}_2^a$ 的自洽性要求$\dot{\overline{\Omega}}_2^a \approx 0$，给出另一个规范约束，即

$$\overline{\Omega}_1^a = \partial^i \pi_i^a + \nabla^2 A_0^a - f_{bc}^a A_i^b \partial^i A_0^c \approx 0 \tag{6-15-11}$$

此系统 Green 函数在相空间中的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \mathscr{D}\phi^a \mathscr{D}\pi_a \mathscr{D}\phi^{+a} \mathscr{D}\pi_a^+ \cdot$$
$$\det|\{\Lambda_k^a, \overline{\Omega}_l^b\}|[\det|\{\theta_i^a, \theta_j^b\}|^{1/2}]\delta(\Lambda)\delta(\Omega)\delta(\theta) \cdot$$
$$\exp\left\{i\int d^3x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}} + J_a^\mu A_\mu^a + J_a^+ \phi^a + \phi^{+a} J_a)\right\} \tag{6-15-12}$$

式中因子 $\det|\{\theta_i^a(x), \theta_j^b(y)\}| = -\kappa\varepsilon_{ij}\delta^{ab}\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 与场量无关，可以从生成泛函(6-15-12)式中略去，而

$$\det|\{\Lambda_i^a(x), \overline{\Omega}_j^b(y)\}| = \det|M^{ab}\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})| \tag{6-15-13}$$

$$M^{ac} = \delta^{ac}\partial^i\partial_i - f_{bc}^a A_i^b \partial^i \tag{6-15-14}$$

因子 $\det|\{\Lambda_i^a(x), \overline{\Omega}_j^b(y)\}|\delta(\partial^i A_i^a)$ 可用因子 $\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}(\partial^\mu A_\mu^a)$ 来代替[37]，而

$$M_{\mathrm{L}}^{ac} = (\delta^{ac}\partial^\mu\partial_\mu - f_{bc}^a A_\mu^b \partial^\mu)\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{6-15-15}$$

根据 δ-函数和 Grassmann 变量 $\overline{C}^a(x)$、$C^a(x)$ 的积分性质，可将(6-15-12)式写为

$$Z[J, \overline{\xi}, \xi, X, Y] = \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \mathscr{D}\phi^a \mathscr{D}\pi_a \mathscr{D}\phi^{+a} \mathscr{D}\pi_a^+ \mathscr{D}\overline{C}^a \mathscr{D}C^a \cdot$$
$$\exp\left\{i\int d^3x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a^\mu A_\mu^a + J_a^+ \phi^a + \phi^{+a} J_a + \overline{\xi}_a C^a + \overline{C}^a \xi_a + X_a^k \mu_k^a + Y_a^i \nu_i^a)\right\} \tag{6-15-16}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} - \partial^{\mu}\overline{C}^{a}\text{D}_{b\mu}^{a}C^{b} + \mu_{a}^{k}\Lambda_{k}^{a} - \frac{\alpha_1}{2}(\overline{\Omega}_1^a)^2 -$$

$$\frac{\alpha_2}{2}(\partial^{\mu}A_{\mu}^{a})^2 + \nu_a^i\theta_i^a \tag{6-15-17}$$

$\mu_a^k(x)$、$\nu_i^a(x)$ 为乘子场；$\overline{\xi}_a$、ξ_a 为鬼场 C^a、$\overline{C}^a$ 的外源；X_a^k、Y_a^i 为乘子场 μ_k^a、ν_i^a 的外源.

由有效正则作用量在相空间中的整体对称性，不必作出生成泛函(6-15-16)式中对正则动量的路径积分，即可导出系统的量子守恒律. 显然，有效 Lagrange 量(6-15-17)式在(x, y)平面内的转动变换下是不变的. 这时矢量场 $A_{\mu}^{a}(x)$、标量场$\phi(x)$ 和$\phi^{+}(x)$ 及其正则动量变换的 Jacobi 行列式为 1，且 $\tau^{0\sigma}=0$，由量子形式的正则 Noether 定理，可得系统的量子守恒角动量

$$J = \int \text{d}^2x \left\{ \pi_a^{\mu}\left(x_1\frac{\partial A_{\mu}^{a}}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial A_{\mu}^{a}}{\partial x_1}\right) + \pi_a^{\mu}\left(\sum\nolimits_{12}\right)_{\mu\nu}A_a^{\nu} + \right.$$

$$\pi_a\left(x_1\frac{\partial \phi^{a}}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial \phi^{a}}{\partial x_1}\right) + \left(x_1\frac{\partial \phi^{+a}}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial \phi^{+a}}{\partial x_1}\right)\pi_a^{+} +$$

$$\left.\overline{p}_a\left(x_1\frac{\partial C^{a}}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial C^{a}}{\partial x_1}\right) + \left(x_1\frac{\partial \overline{C}^{a}}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial \overline{C}^{a}}{\partial x_1}\right)p_a \right\} \tag{6-15-18}$$

式中 $\overline{p}_a$ 和 p_a 分别为鬼场C^a 和 $\overline{C}^a$ 的正则动量，

$$\left(\sum\nolimits_{\rho\sigma}\right)_{\mu\nu} = g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} \tag{6-15-19}$$

可见，在非 Abel Chern-Simons 理论中，系统的量子守恒角动量与经典 Noether 定理导出的结果不同之处在于还必须考虑鬼粒子对系统角动量的贡献. 在经典水平上研究了非 Abel Chern-Simons 理论中可能呈现出的分数自旋性质，不能简单地认为经典理论中的结论在量子理论中仍然保持有效[54].

现考虑 BRS 变换：

$$\delta A_{\mu}^{a} = -\tau\text{D}_{b\mu}^{a}C^{b}, \quad \delta\pi_a^{\mu} = \tau f_{bc}^{a}\pi_c^{\mu}C^{b} \tag{6-15-20a}$$

$$\delta C^a = \frac{\tau}{2} f^a_{bc} C_b C_c, \quad \delta \overline{C}^a = -\frac{\tau}{\alpha_2} \partial^\mu A^a_\mu \qquad (6\text{-}15\text{-}20\text{b})$$

式中 τ 为反对易 Grassmann 数. 在(6-15-20)式变换下,(6-15-17)式中的三项之和,即 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}} - \partial^\mu \overline{C}^a \mathrm{D}^a_{b\mu} C^b - \frac{\alpha_2}{2}(\partial^\mu A^a_\mu)^2$ 是不变的. 在规范变换(6-15-20a)式下,第一类约束的变分仍在约束超曲面上,且 θ^a_i 在(6-15-20a)式变换下不变. 因此,在(6-15-20)式变换下,沿着约束(包括规范约束)所确定的超曲面上,量子理论中有效正则 Lagrange量描述的系统具有 BRS 不变性. 变换(6-15-20)式的 Jacobi 行列式为 1. 按正则量子 Noether 定理,非 Abel Chern-Simons 模型存在的 BRS 量子守恒荷为

$$Q = \int \mathrm{d}^2 x (\pi^\mu_a \delta A^a_\mu + \overline{p}_a \delta C^a + \delta \overline{C}^a p_a) \qquad (6\text{-}15\text{-}21)$$

其次,讨论非 Abel Chern-Simons 项与旋量场耦合的情形[42]. (1+2)维时空非 Abet Chern-Simons 规范场 A^a_μ 与旋量场 ψ 耦合的 Lagrange 量密度(见 § 5-12)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \kappa \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left(\partial_\mu A^a_\nu A^a_\rho + \frac{1}{3} f^a_{bc} A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho \right) +$$
$$\mathrm{i} \overline{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \overline{\psi} \psi \qquad (6\text{-}15\text{-}22)$$

场 A^a_μ、ψ^a、$\overline{\psi}^a$ 的正则共轭动量分别为

$$\pi^{a\mu} = F^{a\mu 0} + \kappa \varepsilon^{0\mu\nu} A^a_\nu \qquad (6\text{-}15\text{-}23)$$

$$\overline{P}^a = \mathrm{i} \overline{\psi}^a \gamma^0, \quad P^a = 0 \qquad (6\text{-}15\text{-}24)$$

系统存在的约束分别为

$$\Lambda^a_1 = \pi^{a0} \approx 0 \qquad (6\text{-}15\text{-}25)$$

$$\overline{\theta}^a = \overline{P}^a - \mathrm{i} \overline{\psi}^a \gamma^0 \approx 0 \qquad (6\text{-}15\text{-}26)$$

$$\theta^a = P^a \approx 0 \qquad (6\text{-}15\text{-}27)$$

$$\Lambda^a_2 = f^a_{bc} (\overline{\psi}^b P^c + \overline{P}^b \psi) + \partial_i \pi^{ai} -$$
$$f^a_{bc} A^b_i \pi^i_c + \kappa \varepsilon^{ij} \partial_i A^a_j \qquad (6\text{-}15\text{-}28)$$

Λ_1^a 和 Λ_2^a 为第一类约束，$\bar{\theta}^a$ 和 θ^a 为第二类约束.

按 Faddeev-Senjanovic 对约束 Hamilton 系统的量子化程序，对每一个第一类约束，需选取一个规范条件. 考虑 Coulomb 规范

$$\Omega_2^a = \partial_i A_i^a \approx 0 \qquad (6\text{-}15\text{-}29)$$

由 Ω_2^a 的自洽性条件 $\dot{\Omega}_2^a \approx 0$，可选另一规范条件，

$$\Omega_1^a = \partial^i \pi_i^a + \nabla^2 A_0^a - f_{bc}^a A_i^b \partial^i A_0^c \approx 0 \qquad (6\text{-}15\text{-}30)$$

不难验证，$\det|\{\bar{\theta},\theta\}|$ 与场量无关；而 $\det|\{\Lambda^a,\Omega^b\}|=\det M^{ab}$，其中

$$M^{ac} = (\delta^{ac}\nabla^2 - f_{bc}^a A_i^b \partial^i)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (6\text{-}15\text{-}31)$$

Green 函数在相空间中的生成泛函可写为

$$Z[J,\bar{\eta},\eta,\bar{\zeta},\zeta,\xi] = \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{P}\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}P\mathscr{D}\lambda_k^a \mathscr{D}\bar{C}^a\mathscr{D}C^a \cdot \exp\left\{ i\int d^3x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{p} + J_a^\mu A_\mu^a + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + \bar{\zeta}^a C^a + \bar{C}^a\zeta^a + \xi_k^a\lambda_k^a)\right\} \qquad (6\text{-}15\text{-}32)$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{p} = \pi_a^\mu \dot{A}_\mu^a + \dot{\psi}\bar{P} + \dot{\bar{\psi}}P - \mathscr{H}_c + \lambda_k^a\Lambda_k^a - \frac{1}{2\alpha_1}(\Omega_1^a)^2 - \frac{1}{2\alpha_2}(\Omega_2^a)^2 - \partial^\mu\bar{C}^a D_{b\mu}^a C^b \qquad (6\text{-}15\text{-}33)$$

在空间转动下，$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{p}$ 不变. 由(6-11-11)式得系统的量子守恒量

$$J_{jk} = \int d^2x \left\{ \pi_a^\mu\left(x_k\frac{\partial A_\mu^a}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial A_\mu^a}{\partial x_k}\right) + \pi_a^\mu\left(\sum\nolimits_{jk}\right)_{\mu\nu} A_a^\nu + i\,\bar{\psi}^a\gamma^0 S_{jk}\psi^a + \bar{P}\left(x_k\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) + \bar{\pi}_a\left(x_k\frac{\partial C^a}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial C^a}{\partial x_k}\right) + \left(x_k\frac{\partial\bar{C}^a}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial\bar{C}^a}{\partial x_k}\right)\pi_a \right\} \qquad (6\text{-}15\text{-}34)$$

式中

$$\left(\sum\nolimits_{\rho\sigma}\right)_{\mu\nu} = g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} \qquad (6\text{-}15\text{-}35)$$

$$S_{jk}=\frac{1}{4}[\gamma_j,\gamma_k] \tag{6-15-36}$$

可见,系统的角动量与由经典 Lagrange 量按 Noether 定理导出的结果是不同的. 这里还必须考虑到鬼粒子对系统角动量的贡献. 系统的分数角动量性质有待进一步研究.

前面的讨论没有涉及理论的重整化效应,对非 Abel Chern-Simons 理论,重整化后参数 κ 会发生移动[55]. 有关重整化的问题这里就不讨论了.

§6-16 位形空间路径积分中的对称性

对称性和守恒律的联系在经典理论中是由 Noether 定理给出的. 在路径积分量子化理论中,出现的是经典数,这对研究系统的量子对称性质提供了方便. 量子系统的性质由 Green 函数的生成泛函导出,而相空间中生成泛函比位形空间生成泛函更基本. 当对正则动量的路径积分为 Gauss 型时,相空间路径积分可化为位形空间的路径积分. 一般来说,要作出对正则动量的路径积分常常是十分困难的(特别是对约束 Hamilton 系统),甚至是不可能的. 前面讨论了系统的整体正则对称性和量子守恒律的联系. 规范不变系统为约束 Hamilton 系统,该系统的量子化应按约束 Hamilton 系统的量子理论来实现. 在某些情形下,也可用直观的 Faddeev-Popov 方法来完成[45]. 对杨-Mills 理论,按约束 Hamilton 系统路径积分量子化,作出对正则动量的路径积分后,恰好可以化为 Faddeev-Popov 方法所得的结果. Faddeev-Popov 方法虽不严格,但直观简便,对一些实际物理系统的应用也是可行的.

路径积分量子化理论的应用通常是通过将相空间生成泛函中对动量的路径积分转化为位形空间中的生成泛函,从而由位形空间有效 Lagrange 量得到系统的量子理论、Feynman 规则、Ward-

Takahashi 恒等式以及重整化的证明等.

这里将从较直观和简便的 Faddeev-Popov 方法所给出的位形空间中规范理论的 Green 函数的生成泛函出发,从位形空间整体对称变换导出系统的 Ward 恒等式和量子守恒律[56].

设非 Abel 规范场 $A_\mu^a(x)$ 与物质场 $\phi(x)$ 耦合的规范不变 Lagrange量为 $\mathscr{L}(\phi, A_\mu^a, \partial_\nu\phi, \partial_\nu A_\mu^a)$. 选取规范条件 $F^a[A_\mu^a]=0$,按 Faddeev-Popov 方法,得到该系统的 Green 函数在位形空间中的生成泛函[45]

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}C_a^+ \mathscr{D}C_a \cdot \exp\left\{ i\int d^4x (\mathscr{L}_{\text{eff}} + J\phi + J_a^\mu A_\mu^a) \right\} \qquad (6\text{-}16\text{-}1a)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{eff}} &= \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\text{gh}} + \mathscr{L}_m \\ \mathscr{L}_{\text{gh}} &= C_a^+ M_F^{a\beta} C_\beta \\ \mathscr{L}_m &= -\frac{1}{2\alpha_0}(F^a[A_\mu^a])^2 \end{aligned} \qquad (6\text{-}16\text{-}2)$$

其中 $M_F^{a\beta}$ 取决于规范变换和规范条件的具体形式. 为简化记号,记

$$\psi^a = (\phi, A_\mu^a, C_a, C_a^+), \quad J_a = (J, J_a^\mu)$$

于是(6-16-1a)式可写为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\psi^a \exp\left\{ i\int d^4x (\mathscr{L}_{\text{eff}} + J_a\psi^a) \right\} \qquad (6\text{-}16\text{-}1b)$$

传统的用路径(泛函)积分方法导出规范系统的 Ward(或 Ward-Takahashi)恒等式,就是从(6-16-1b)式出发的[45]. 这里先给出整体变换下的 Ward 恒等式.

现考虑位形空间中的无穷小变换:

$$\left.\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x, \psi^a, \psi^a_{,\mu}) \\ \psi'^a(x') &= \psi^a(x) + \varepsilon_\sigma \xi^{a\sigma}(x, \psi^a, \psi^a_{,\mu}) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}16\text{-}3)$$

式中:$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意参数;$\tau^{\mu\sigma}$和 $\xi^{a\sigma}$均为 x、$\psi^a(x)$

和 $\psi^{\alpha}_{,\mu}(x)$的函数. 在(6-13-3)式变换下有效作用量 $I_{\text{eff}}=\int \mathrm{d}^4 x\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的变分[4]

$$\Delta I_{\text{eff}}=\int \mathrm{d}^4 x\varepsilon_{\sigma}\left\{\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\psi^{\alpha}}(\xi^{\alpha\sigma}-\psi^{\alpha}_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\right.$$
$$\left.\partial_{\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\psi^{\alpha}_{,\mu}}(\xi^{\alpha\sigma}-\psi^{\alpha}_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}\right]\right\} \tag{6-16-4}$$

式中

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\psi^{\alpha}}=\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\psi^{\alpha}}-\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\psi^{\alpha}_{,\mu}}\right) \tag{6-16-5}$$

假设(6-16-3)式中场量变换的 Jacobi 行列式为 1,生成泛函(6-16-1b)式在(6-16-3)式变换下是不变的,将(6-16-4)式代入(6-16-1b)式得

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\psi^{\alpha}\exp\left\{\mathrm{i}(I_{\text{eff}}+\Delta I_{\text{eff}})+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[J_{\alpha}\psi^{\alpha}+\right.$$
$$\left.\varepsilon_{\sigma}J_{\alpha}(\xi^{\alpha\sigma}-\psi^{\alpha}_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\varepsilon_{\sigma}\partial_{\mu}(J_{\alpha}\psi^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})]\right\}=$$
$$\int\mathscr{D}\psi^{\alpha}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}+J_{\alpha}\psi^{\alpha})\right\}\left\{1+\mathrm{i}\,\Delta I_{\text{eff}}+\right.$$
$$\left.\mathrm{i}\varepsilon_{\sigma}\int\mathrm{d}^4x[J_{\alpha}(\xi^{\alpha\sigma}-\psi^{\alpha}_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\varepsilon_{\sigma}\partial_{\mu}(J_{\alpha}\psi^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})]\right\}=$$
$$\left\{1+\mathrm{i}\Delta I_{\text{eff}}+\mathrm{i}\,\varepsilon_{\sigma}\int\mathrm{d}^4x[J_{\alpha}(\xi^{\alpha\sigma}-\psi^{\alpha}_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\right.$$
$$\left.\partial_{\mu}(J_{\alpha}\psi^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})]\right\}_{\psi^{\alpha}\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J_{\alpha}}}Z[J] \tag{6-16-6}$$

从而,生成泛函 $Z[J]$适合

$$\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\psi^{\alpha}}(\xi^{\alpha\sigma}-\psi^{\alpha}_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_{\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\psi^{\alpha}_{,\mu}}(\xi^{\alpha\sigma}-\psi^{\alpha}_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}\right]+\right.$$
$$\left.J_{\alpha}(\xi^{\alpha\sigma}-\psi^{\alpha}_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_{\mu}(J_{\alpha}\psi^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})\right\}_{\psi^{\alpha}\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J_{\alpha}}}Z[J]=0 \tag{6-16-7}$$

如果系统的有效作用量 I_{eff}在(6-16-3)式变换下不变,那么(6-16-7)式可化为

$$\int d^4x[J_\alpha(\xi^{\alpha\sigma} - \psi^\alpha_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \partial_\mu(J_\alpha\psi^\alpha\tau^{\mu\sigma})]_{\psi^\alpha\to\frac{\delta}{i\delta J_\alpha}}Z[J] = 0 \tag{6-16-8}$$

对于内部对称变换 $\tau^{\mu\sigma}=0$,此时(6-16-8)式可化为

$$\int d^4x\left[J_\alpha\xi^{\alpha\sigma}\left(x,\frac{\delta}{i\delta J_\alpha(x)}\right),\frac{1}{i}\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)}\right)\right]Z[J] = 0 \tag{6-16-9}$$

(6-16-7)～(6-16-9)式称为位形空间中整体变换下的 Ward 恒等式. 将(6-16-7)式等关于外源 $J_\alpha(x)$ 多次求泛函微商,然后让 $J_\alpha(x)=0$,可得 Green 函数间的一些关系式.

下面在量子理论中讨论位形空间整体对称性和量子守恒律的联系. 假设系统的有效作用量 I_{eff}在(6-16-3)式变换下不变. 将整体变换(6-16-3)式定域化,即考虑如下的定域变换:

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x,\psi^\alpha,\psi^\alpha_{,\mu}) \\ \psi^{\alpha\prime} &= \psi^\alpha + \varepsilon_\sigma(x)\xi^{\alpha\sigma}(x,\psi^\alpha,\psi^\alpha_{,\mu}) \end{aligned}\right\} \tag{6-16-10}$$

式中 $\varepsilon_\sigma(x)$ 为无穷小任意函数,它们及其所需的各级微商在时空区域边界上为 0. 假设 $\varepsilon_\sigma(x)=\varepsilon_\sigma$ (参数)时, I_{eff} 在(6-16-3)式变换下不变. 在(6-16-10)式变换下, I_{eff} 的变分为

$$\begin{aligned}\Delta I_{\text{eff}} = &\int d^4x\varepsilon_\sigma(x)\left\{\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\psi^\alpha}(\xi^{\alpha\sigma} - \psi^\alpha_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}}(\xi^{\alpha\sigma} - \right.\right.\\ &\left.\left.\psi^\alpha_{,\nu}\tau^{\nu\sigma}) + \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}\right]\right\} + \int d^4x\left\{\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \right.\right.\\ &\left.\left.\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}}(\xi^{\alpha\sigma} - \psi^\alpha_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]\partial_\mu\varepsilon_\sigma(x)\right\}\end{aligned} \tag{6-16-11}$$

由于假设 I_{eff}在(6-16-3)式的变换下不变,因此(6-16-11)式中的第一个积分为 0. 根据 $\varepsilon_\sigma(x)$ 的边界条件,(6-16-11)式又可写为

$$\Delta I_{\text{eff}} = -\int d^4x\varepsilon_\sigma(x)\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}}(\xi^{\alpha\sigma} - \psi^\alpha_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right] \tag{6-16-12}$$

设(6-16-10)式中场量变换的 Jacobi 行列式为 1. 由于生成泛函

(6-16-1b)式在(6-16-10)式变换下不变,考虑到 $\varepsilon_\sigma(x)$ 的边界条件,得

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\psi^a\left\{1-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\varepsilon_\sigma(x)\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\psi^a_{,\mu}}(\xi^{a\sigma}-\psi^a_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]+\right.$$

$$\left.\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\varepsilon_\sigma(x)J_a(\xi^{a\sigma}-\psi^a_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\,I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xJ_a\psi^a\right\}$$

(6-16-13)

将(6-16-13)式关于 $\varepsilon_\sigma(x)$ 求泛函微商,得

$$\int\mathscr{D}\psi^a\left\{\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\psi^a_{,\mu}}(\xi^{a\sigma}-\psi^a_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]-\right.$$

$$\left.J_a(\xi^{a\sigma}-\psi^a_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\right\}\exp\left\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xJ_a\psi^a\right\}=0$$

(6-16-14)

将(6-16-14)式关于 $J(x_j)$ 求 n 次泛函微商,可得

$$\int\mathscr{D}\psi^a\left(\left\{\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\psi^a_{,\mu}}(\xi^{a\sigma}-\psi^a_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]-J_aN^{a\sigma}\right\}\cdot\right.$$

$$\psi^a(x_1)\psi^a(x_2)\cdots\psi^a(x_n)+(-\mathrm{i})\sum_j\psi^a(x_1)\cdots$$

$$\left.\psi^a(x_{j-1})\psi^a(x_{j+1})\cdots\psi^a(x_n)N^{a\sigma}\delta(x-x_j)\right)\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xJ_a\psi^a\right\}=0\qquad(6\text{-}16\text{-}15)$$

式中

$$N^{a\sigma}=\xi^{a\sigma}-\psi^a_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}\qquad(6\text{-}16\text{-}16)$$

在(6-16-15)式中,让外源 $J_a=0$,得

$$\langle 0|T^*\left\{\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\psi^a_{,\mu}}(\xi^{a\sigma}-\psi^a_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]\right\}\cdot$$

$$\psi^a(x_1)\cdots\psi^a(x_n)|0\rangle=\mathrm{i}\sum_j\langle 0|T^*[\psi^a(x_1)\cdots\cdot$$

$$\psi^a(x_{j-1})\psi^a(x_{j+1})\cdots\psi^a(x_n)N^{a\sigma}]|0\rangle\delta(x-x_j)\qquad(6\text{-}16\text{-}17)$$

其中 T^* 是一种特定的编时乘积[45]. 固定 t,让

$$t_1, t_2, \cdots, t_n \to +\infty; t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \to -\infty$$

考虑到

$$\langle 0|\psi^a(\boldsymbol{x},\infty) = \langle \mathrm{out}|,\ \psi(\boldsymbol{x},-\infty)|0\rangle = |\mathrm{in}\rangle \quad (6\text{-}16\text{-}18)$$

(6-16-17)式就成为

$$\langle \mathrm{out}, m|\left\{\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \psi^a_{,\mu}}(\xi^{a\sigma} - \psi^a_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]\right\}|n-m, \mathrm{in}\rangle = 0$$

$$(6\text{-}16\text{-}19)$$

由于 m 和 n 是任意的,于是有

$$\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \psi^a_{,\mu}}(\xi^{a\sigma} - \psi^a_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right] = 0 \quad (6\text{-}16\text{-}20)$$

对(6-16-20)式在场所处的区域积分,利用 Gauss 定理及场在区域的边界上为 0 的性质,所得的守恒量(算符)

$$Q^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3x\left[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma} + \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \psi^a_{,0}}(\xi^{a\sigma} - \psi^a_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right] \quad (6\text{-}16\text{-}21)$$

(6-16-21)式表明:在位形空间的整体变换下,如果系统的有效作用量保持不变,且对应的变换(6-16-10)式的 Jacobi 行列式为 1,则该系统存在量子守恒量(6-16-21)式. 这就是位形空间中的量子水平 Noether 定理(此结果在理论中无反常时成立).

位形空间量子水平 Noether 定理是在 Faddeev-Popov 法有效的前提下导出的. 也就是说,当相空间生成泛函中对正则动量的积分为 Gauss 型时,上述结果成立;对正则动量不可积的情形,则必须从相空间中的对称性来分析.

将上述结果用非 Abel Chern-Simons 理论,利用 Faddeev-Popov 方法写出该系统的生成泛函,可导出系统在 BRS 变换下的 Ward 恒等式、量子 BRS 守恒荷、非定域形式正规顶角间的关系以及量子守恒角动量[56].

(1+2)维时空非 Abel Chern-Simons 理论与标量场耦合的

Lagrange 量密度[53]

$$\mathscr{L} = (\mathrm{D}_\mu\phi)^+ (\mathrm{D}^\mu\phi) +$$

$$\kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a + \frac{1}{3} f_{bc}^a A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c\right) \tag{6-16-22}$$

式中：$\phi(x)$ 为 N 分量标量场；D_μ 为协变微商. 非 Abel Chern-Simons 项的规范不变性要求常数 κ 是量子化的[36].

选取 Lorentz 规范

$$\partial^\mu A_\mu^a = 0 \tag{6-16-23}$$

利用 Faddeev-Popov 方法可写出此系统 Green 函数的生成泛函

$$Z[J, \eta^+ \eta, \bar{\xi}, \xi] = \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\phi^+ \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\overline{C}_a \mathscr{D}C_a \cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x \mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + J_a^\mu A_\mu^a +\right.$$

$$\left.\eta^+ \phi + \phi^+ \eta + \bar{\xi}C + \overline{C}\xi\right\} \tag{6-16-24}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\mathrm{fix}} + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{6-16-25}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{fix}} = -\frac{1}{2\alpha_0}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \tag{6-16-26}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} = -\partial^\mu \overline{C}_a \mathrm{D}_{b\mu}^a C_b \tag{6-16-27}$$

其中 $\overline{C}_a(x)$ 和 $C_b(x)$ 为鬼场；$\mathrm{D}_{b\mu}^a = \delta_b^a \partial_\mu + f_{bc}^a A_\mu^c$. 有效 Lagrange 量描述的系统在下列 BRS 变换下不变：

$$\left.\begin{aligned}
\delta\phi &= \mathrm{i}\tau C_a T^a \phi \\
\delta\phi^+ &= -\mathrm{i}\tau C_a \phi^+ T^a \\
\delta A_\mu^a &= -\tau \mathrm{D}_{b\mu}^a C_b \\
\delta C^a &= \frac{1}{2}\tau f_{bc}^a C_b C_c \\
\delta\overline{C}^a &= -\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)\tau \partial^\mu A_\mu^a
\end{aligned}\right\} \tag{6-16-28}$$

式中：τ 为 Grassmann 参数；T^a 为规范群的生成元. 在(6-16-28)式变换下，不难验证，$\delta(\mathrm{D}_{b\mu}^{a}C_b)=0$，且 $\delta(\delta\phi)=\delta(\delta\phi^+)=\delta(\delta C^a)=0$. 对 δA_μ^a、δC^a、$\delta\phi$ 和 $\delta\phi^+$ 分别引入外源 U_a^μ、V^a、ζ^+ 和 ζ，并将生成泛函写为

$$Z[J,\eta^+,\eta,\bar{\xi},\xi,U,V,\zeta^+,\zeta]=\int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\phi^+\mathscr{D}\phi\mathscr{D}\bar{C}_a\mathscr{D}C_a\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_a^\mu A_\mu^a+\eta^+\phi+\phi^+\eta+\bar{\xi}C+\right.$$

$$\left.\bar{C}\xi+U_a^\mu\delta A_\mu^a+V^a\delta C_a+\zeta^+\delta\phi+\delta\phi^+\zeta)\right\}\qquad(6\text{-}16\text{-}29)$$

生成泛函(6-16-29)式在(6-16-28)式变换下不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1，于是有

$$\int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\phi^+\mathscr{D}\phi\mathscr{D}\bar{C}_a\mathscr{D}C_a\left[\int\mathrm{d}^3x(J_a^\mu\delta A_\mu^a+\eta^+\delta\phi+\delta\phi^+\eta+\bar{\xi}\delta C+\right.$$

$$\left.\delta\bar{C}\xi)\right]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_a^\mu A_\mu^a+\phi^+\eta+\eta^+\phi+\bar{\xi}C+\right.$$

$$\left.\bar{C}\xi+U_a^\mu\delta A_\mu^a+V^a\delta C_a+\zeta^+\delta\phi+\delta\phi^+\zeta)\right\}=0\qquad(6\text{-}16\text{-}30)$$

由此所得 Green 函数生成泛函的 Ward 恒等式为

$$\int\mathrm{d}^3x\left[\eta^+\frac{\delta}{\delta\zeta^+}+\frac{\delta}{\delta\zeta}\eta+J_a^\mu\frac{\delta}{\delta U_a^\mu}-\bar{\xi}^a\frac{\delta}{\delta V^a}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{\alpha_0}\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta J_a^\mu}\right)\xi^a\right]Z[J,\eta^+,\eta,\bar{\xi},\xi,U,V,\zeta^+,\zeta]=0\qquad(6\text{-}16\text{-}31)$$

有效 Lagrange 量描述的系统在 BRS 变换下不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1. 由(6-16-21)式得系统的量子守恒量(算符)

$$Q=\int\mathrm{d}^2x\left[-\frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}A^{ja}\mathrm{D}_{bi}^aC_b+\mathrm{i}(\mathrm{D}_0\phi)^+C_aT^a\phi-\mathrm{i}\phi^+C_aT^a(\mathrm{D}_0\phi)+\right.$$

$$\left.(-\dot{\bar{C}}_a)\frac{1}{2}f_{bc}^aC_bC_c+\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)\mathrm{D}_{b0}^aC^b\partial^\nu A_\nu^a\right]\qquad(6\text{-}16\text{-}32)$$

有效作用量在空间转动下不变，场量在空间转动下的 Jacobi 行列式为 1，由(6-16-21)式所得的量子守恒角动量

$$
\begin{aligned}
J_{lk}=\int \mathrm{d}^2x\Bigg\{&\left(-\frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}A^{ja}\right)\left(x_k\frac{\partial A_i^a}{\partial x_l}-x_l\frac{\partial A_i^a}{\partial x_k}\right)+\\
&\left(-\frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}A^{ja}\right)\left(\sum\nolimits_{lk}\right)_{i\nu}A_a^{\nu}+(\mathrm{D}_0\phi)^+\left(x_k\frac{\partial\phi}{\partial x_l}-x_l\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)+\\
&\left(x_k\frac{\partial\phi^+}{\partial x_l}-x_l\frac{\partial\phi^+}{\partial x_k}\right)\mathrm{D}_0\phi+(-\dot{\bar{C}}_a)\left(x_k\frac{\partial C_a}{\partial x_l}-x_l\frac{\partial C_a}{\partial x_k}\right)+\\
&\left(x_k\frac{\partial\bar{C}_a}{\partial x_l}-x_l\frac{\partial\bar{C}_a}{\partial x_k}\right)\mathrm{D}_{b0}^{a}C^b
\end{aligned}
\tag{6-16-33}
$$

可见,在量子理论中系统的守恒角动量还必须计入鬼场的贡献,这是与经典理论不同的.不难验证,(6-16-33)式和从正则形式得到的量子守恒角动量(6-15-18)式是相同的.

这里在位形空间中分析了规范系统的整体量子对称性质.路径积分提供了一个十分有用的工具,因为路径积分中出现的是经典的数.相空间路径积分比位形空间路径积分更一般.其后者适用于对正则动量的路径积分可积出的情形,而前者则是普遍的.这样,从相空间路径积分出发,分析研究系统的量子正则对称性,就具有更基本的意义[57].本章前面各节已讨论了这些问题.

对于规范不变系统,直观、简便的路径积分量子化方法是 Faddeev-Popov 方法.将该方法用于一个给定的规范系统时,通过路径(泛函)积分的变换可导致用位形空间 Lagrange 量(或有效 Lagrange 量)表达的 Green 函数的位形空间生成泛函.由位形空间中作用量(或有效作用量)在整体变换下的不变性,当位形空间中对应场量变换的 Jacobi 行列式为 1 时,导出了系统的量子守恒荷(此结论在理论中无反常,Faddeev-Popov 量子化方法适用且变换的 Jacobi 行列式为 1 时成立).一般地,该守恒荷有别于经典 Noether 荷,表明经典理论中对称性和守恒律的联系在量子理论中不一定再有效.定域规范不变的系统为约束 Hamilton 系统,按约束系统的路径积分理论对该系统进行量子化,在某些情形下,作

出相空间路径积分中对正则动量的积分后，可化为 Faddeev-Popov 方法所得到的结果(如杨-Mills 场).

将上述一般结果用于非 Abel Chern-Simons 理论，可导出非 Abel Chern-Simons 理论和标量场耦合系统的量子 BRS 守恒荷和量子守恒角动量. 该量子守恒角动量与由未量子化的原始 Lagrange量按经典 Noether 定理导出的结果不同之处在于还必须计入鬼粒子场对系统角动量的贡献. 文献[34,35]中在经典水平上研究了非 Abel Chern-Simons 理论中可能呈现出的分数自旋性质;但在量子理论中，不能简单地认为该性质仍然保持. 对上述非 Abel Chern-Simons 理论，通过前面正则形式的分析，不必作出相空间路径积分中对正则动量的积分，也可以导出上述同样结果. 这表明 Faddeev-Popov 方法对非 Abel Chern-Simons 理论和标量场耦合模型是适用的.

对于 Abel Chern-Simons 理论，由于在 Lorentz 规范下不会出现鬼粒子[45]，类似的分析可知，此时量子守恒角动量与由经典 Noether 定理导致的结果相同. 文献[31,32]中从经典理论得到的系统具有分数自旋和分数统计性质，该性质在量子理论中仍然保持.

参考文献

[1] Mizrahi M M. J Math Phys, 1978, 19: 298

[2] Suura H, Young B L. Phys Rev, 1973, D8: 875

[3] Li Z P (李子平). Int J Theor Phys, 1987, 26: 853

[4] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1993

[5] 李子平. 中国科学，A辑，1992，42：977

[6] Li Z P (李子平). Int J Theor Phys, 1993, 32: 201

[7] Li Z P (李子平). Phys Rev, 1994, E50: 876

[8] Li Z P（李子平）. Int J Theor Phys，1995，34：523
[9] 李子平. 中国科学，A辑，1996，46：649
[10] Li Z P（李子平）. Z Phys，1997，C76：181
[11] Gitman D M，Tyutin I V. Quantization of Fields with Constraints，Berlin：Springer-Verlag，1990
[12] Henneaux M，Teitellboim C. Quantization of Gauge Sys-tem，Princeton：Princeton University Press，1992
[13] Nishikawa T I. Phys Lett，1993，B309：351
[14] Sakita B. Quantum Theory of Many Variables System and Fields，Singapore：World Scientific，1985
[15] Feynman R P. Phys Rev，1950，80：440
[16] Lee T D，Yang C N. Phys Rev，1962，128：885
[17] Gerstein I S，Jackiw R，Lee B W，et al. Phys Rev，1971，D3：2486
[18] Du T S，Yin H C，Ruan T N. Nucl Phys，1980，B164：103
[19] Li Z P（李子平）. Acta Physica Sinica（Oversea Edition），1994，3：481
[20] Li·Z P（李子平）. Chinese Phys Lett，1993，10：68
[21] Li Z P（李子平）. Europhys Lett，1993，21：141
[22] Senechal D. Phys Lett，1992，B297：138
[23] Li Z P（李子平）. High Energy Physics and Nuclear Physics（USA），1994，18：265
[24] 李子平. 高能物理与核物理，1996，20：698
[25] Li Z P（李子平），Yang C. J Phys，1995，A28：5931
[26] Galvão C A P，Lemons N A. J Math Phys，1988，29：1588
[27] He B，Li Z P（李子平）. Commun Theor Phys，1995，23：371
[28] Fradkin E S，Palchik M Ya. Phys Lett，1984，B147：86
[29] Palchik M Ya. Yad Fiz，1985，42：522
[30] 邝宇平，易余萍. 高能物理与核物理，1980，4：286
[31] Kim J K，Kim W T，Shin H. J Phys，1994，A27：6067
[32] Banerjee R. Nucl Phys，1994，B419：611
[33] Lerda A. Anyons. Berlin：Springer-Verlag，1992

[34] Antillon A, Escallona J, Genman G, et al. Phys Lett, 1995, B359: 327
[35] Banerjee R, Chakraborty B. Ann Phys (N Y), 1996, 247: 188
[36] Deser S, Jackiw R, Templeton S. Ann Phys (N Y), 1982, 140: 372
[37] Sundermeyer K. Constrained Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1982
[38] Joglekar S D. Phys Rev, 1991, D44: 3879
[39] Danilov G S. Phys Lett, 1991, B257: 285
[40] 李子平. 物理学报, 1996, 45: 1602
[41] Li Z P (李子平). Europhys Lett, 1996, 34: 325
[42] 李子平. 高能物理与核物理, 1997, 21: 34
[43] 李子平. 高能物理与核物理, 1995, 19: 1012
[44] 李子平. 物理学报, 1992, 41: 710
[45] Young B L. Introduction to Quantum Field Theories. Beijing: Science Press, 1987
[46] 李子平, 廖理几. 群论及其在物理学中的应用. 乌鲁木齐: 新疆人民出版社, 1988
[47] Li Z P (李子平). Int J Theor Phys, 1996, 35: 1353
[48] Rodriguez-Nuñez J J. Int J Theor Phys, 1990, 29: 467
[49] Schweber S S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York: Harper and Row, 1961
[50] Nash C. Relativistic Quantum Field. New York: Academic Press, 1978
[51] Banerjee R. Phys Rev, 1993, D48: 2095
[52] Banerjee R, Chakraborty B. Phys Rev, 1994, D49: 5431
[53] Kim W T, Park Y J. Phys Lett, 1994, B336: 376
[54] 李子平. 科学通报, 1998, 43: 2396
[55] Dunne G. Self-Dual Chern-Simons Theories. Berlin: Springer-Verlag, 1995
[56] Li Z P (李子平), Gao H X. Int J Theor Phys, 1997, 36: 1071
[57] Li Z P (李子平), Bao J. Int J Theor Phys, 1999, 38: 1677

第七章

高阶微商系统理论

描述系统的 Lagrange 量含高阶微商情形(高阶微商系统)的研究,日益受到人们的关注.本章首先借助约束系统的 Dirac 理论和 Ostrogradsky 变换给出了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式,阐明了该系统几种形式的广义正则方程,指出了与第一类约束相联系的约束乘子是完全任意的,第一类约束为规范变换生成元(高阶微商系统的 Dirac 猜想),说明了规范生成元的构成,进一步论述了有限自由度高阶微商奇异 Lagrange 量系统的经典正则对称性,建立了正则 Noether 定理和 Noether 恒等式,导出了显含时间系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量,阐明了该不变量与系统正则方程间的关系;然后以正则 Noether 定理和广义 Poincaré-Cartan 积分不变量为工具,给出了高阶微商系统 Dirac 猜想的反例,并将有限自由度系统的经典正则对称性,推广到场论中高阶微商奇异 Lagrange 量系统,论述了高阶微商场论中规范生成元的构成;最后,通过路径积分量子化,阐述了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的量子正则对称性质,建立了相空间中定域变换和整体变换下的广义正则 Ward 恒等式以及整体对称下的量子守恒律,给出了它们分别在杨-Mills 场和非 Abel-Chern-Simons 理论等方面的应用.

§7-1 高阶微商系统

描述动力学系统的 Lagrange 量含广义坐标对时间的高阶微商(简称高阶微商系统)的情形,Ostrogradsky 最早开始了对此类

系统的研究[1],Bopp[2]和 Podolsky[3]研究了二阶微商情形的广义电动力学. Borneas[4]、Kostler 和 Smith[5]等人给出了高阶微商系统的正则形式. Rodrigues 讨论了该系统的正则变换[6],Thielheim[7]、Souza 和 Rodrigues[8]以及 Mušicki[9]将其推广到经典场论. 文献[10]中用现代数学观点论述了高阶微商的有限自由度系统(广义力学)和场论.

对高阶微商奇异 Lagrange 量系统的研究,是从讨论所谓等价 Lagrange 量开始的[11~13]. Kimura 分析了奇异 Lagrange 量的广义力学其 Hamilton 形式中出现的约束[14]. Dirac 约束理论对二阶微商系统的推广开展了多方面研究[15~18]. Saito 等人讨论了任意高阶微商奇异 Lagrange 系统的正则形式[19]. 高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式在 Bopp-Podolsky 电磁学[20]和相对论弦模型[21]中的应用也已开展了讨论. 高阶微商理论与粒子的相对论性动力学[17~22]、引力理论[23~25]、广义 KDV 方程[26]、超对称[27]、弦模型[21]等问题有关. 高阶微商理论可改善相应的 Feynmann 图的收敛性,但幺正性问题有待进一步研究[28,29].

本节在位形空间中讨论 Lagrange 量含高阶微商的有限自由度系统(广义力学)的运动方程和对称性质[30]. 有限自由度系统的高阶微商理论是研究高阶微商场论的先导[10].

现讨论自由度为 n 的广义力学系统。该系统用 Lagrange 量 $L(t_i;q^i_{(0)}(t),q^i_{(1)}(t),\cdots,q^i_{(N_i)}(t))$ 来描述,其中

$$q^i_{(r)}(t)=\mathrm{D}^r q^i(t)=\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r}q^i(t)$$

这里假设 Lagrange 量可显含时间并且不同 $q^i(t)$ 关于时间的最高阶微商 N_i 是不同的. 系统的作用量

$$I[q]=\int_{t_1}^{t_2}L(t;q^i_{(0)}(t),q^i_{(1)}(t),q^i_{(2)}(t),\cdots,q^i_{(N_i)}(t))\mathrm{d}t \quad (7\text{-}1\text{-}1)$$

系统真实运动是 q^i 的变分使作用量取极值(固定边界条件),即

$$\delta I = 0 \tag{7-1-2a}$$

$$\delta t = 0,\ \delta q^{i}_{(s)}(t_1) = \delta q^{i}_{(s)}(t_2) = 0$$

$$(i = 1,2,\cdots,n; s = 0,1,\cdots,N_i - 1) \tag{7-1-2b}$$

下面推导系统的运动方程. 设由真实路径过渡到相邻路径时，$q^{i}_{(r)}$的任意微小增量为 $\delta q^{i}_{(r)}$，等时变分适合

$$\delta q^{i}_{(r)} = \mathrm{D}^{r}(\delta q^{i}) \tag{7-1-3}$$

作用量的变分

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{N_i} \frac{\partial L}{\partial (\mathrm{D}^{k} q^{i})} \delta(\mathrm{D}^{k} q^{i}) \mathrm{d}t \tag{7-1-4}$$

利用恒等关系

$$v \mathrm{D}^{k} u = \mathrm{D}[Q_k(u,v)] + u \overline{\mathrm{D}}^{k} v \tag{7-1-5}$$

式中 u、v 为任意函数，而

$$Q_{k+1}(u,v) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-1} \mathrm{D}^{l} u \mathrm{D}^{k-1} v \tag{7-1-6}$$

$$\overline{\mathrm{D}}^{k} = (-1)^{k} \mathrm{D}^{k} \tag{7-1-7}$$

可得

$$\frac{\partial L}{\partial (\mathrm{D}^{k} q^{i})} \delta(\mathrm{D}^{k} q^{i}) = \frac{\partial L}{\partial (\mathrm{D}^{k} q^{i})} \mathrm{D}^{k}(\delta q^{i}) =$$

$$\delta q^{i} (-\mathrm{D})^{k} \left[\frac{\partial L}{\partial (\mathrm{D}^{k} q^{i})} \right] + \mathrm{D}\left[Q_k \left(\delta q^{i}, \frac{\partial L}{\partial (\mathrm{D}^{k} q^{i})} \right) \right] \tag{7-1-8}$$

引入记号

$$Q(q^{i}, L) = \sum_{k=1}^{N_i} Q_k \left(\delta q^{i}, \frac{\partial L}{\partial (\mathrm{D}^{k} q^{i})} \right) \tag{7-1-9}$$

由(7-1-8)式可得

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{N_i} \frac{\partial L}{\partial (\mathrm{D}^{k} q^{i})} \delta(\mathrm{D}^{k} q^{i}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\delta I}{\delta q^{i}} \delta q^{i} + \mathrm{D}[Q(q^{i}, L)] \right\} \tag{7-1-10}$$

式中

$$\frac{\delta I}{\delta q^i}=\sum_{k=0}^{N_i}(-\mathrm{D})^k\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)} \tag{7-1-11}$$

(7-1-9)式又可写为

$$Q(q^i,L)=\sum_{k=1}^{N_i}Q_k\left(\delta q^i,\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\right)=$$

$$\sum_{k=1}^{N_i}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-l-1}\mathrm{D}^l(\delta q^i)\mathrm{D}^{k-l-1}\left[\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\right] \tag{7-1-12}$$

令 $k-l-1=m,l+1=j$ 改变求和指标，得

$$Q(q^i,L)=\sum_{j=1}^{N_i}\sum_{m=0}^{N_i-j}(-\mathrm{D})^m\left[\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^{j+m}q^i)}\right]\mathrm{D}^{j-1}(\delta q^i) \tag{7-1-13}$$

引入广义正则动量

$$p_i^{(j-1)}\equiv p_{i/j}=\sum_{k=0}^{N_i-j}(-\mathrm{D})^k\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^{k+j}q^i)} \tag{7-1-14a}$$

即按 Ostrogradsky 变换引入广义正则动量，由(7-1-14a)式有下列递推关系，即

$$p_i^{(N_i-1)}=\frac{\partial L}{\partial q^i_{(N_i)}} \tag{7-1-14b}$$

$$p_i^{(s-1)}=\frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}}-\dot{p}_i^{(s)} \tag{7-1-14c}$$

$$(s=1,2,\cdots,N_i-1)$$

于是有

$$Q(q^i,L)=\sum_{j=1}^{N_i}p_i^{(j-1)}\mathrm{D}^{j-1}(\delta q^i) \tag{7-1-15}$$

将(7-1-10)、(7-1-15)式代入(7-1-4)式得

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta I}{\delta q^i}\delta q^i\right)\mathrm{d}t+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}p_i^{(j-1)}\delta(\mathrm{D}^{j-1}q^i)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{7-1-16}$$

由于边界条件,(7-1-16)式右边最后一项为 0,真实运动使作用量取极值,

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta I}{\delta q^i}\,\delta q^i\right)\mathrm{d}t=0 \tag{7-1-17}$$

式中 δq^i 是彼此独立的. 从而,由(7-1-17)式得到的高阶微商系统的 Lagromge 方程为

$$\frac{\delta I}{\delta q^i}=\sum_{k=0}^{N_i}(-\mathrm{D})^k\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}=0 \tag{7-1-18}$$

从 Lagrange 量含高阶微商系统的对称性质出发,可导出该系统的运动守恒量[30,31].

设系统的作用量(7-1-1)式,在下列无穷小变换

$$\left.\begin{aligned}&t\to t'=t+\Delta t=t+\varepsilon_\sigma\tau^\sigma(t;q^i)\\&q^i_{(k)}(t)\to q'^i_{(k)}(t')=q^i_{(k)}(t)+\Delta q^i_{(k)}(t)=\\&\qquad q^i_{(k)}(t)+\varepsilon_\sigma\xi^{i\sigma}_{(k)}(t;q^i(t),\dot q^i(t),\cdots,q^i_{N_i}(t))\\&\qquad(k=0,1,\cdots,N_i;\sigma=1,2,\cdots,r)\end{aligned}\right\} \tag{7-1-19}$$

下不变(ε_σ 为任意无穷小参量),即 $I[q'(t')]=I[q(t)]$,

$$\int_{t'_1}^{t'_2}L'(t';q'^i(t'),\dot q'^i(t'),\cdots,q'^i_{N_i}(t'))\mathrm{d}t'=$$

$$\int_{t_1}^{t_2}L(t;q^i(t),\dot q^i(t),\cdots,q^i_{N_i}(t))\mathrm{d}t \tag{7-1-20}$$

引入等时变分 $\delta q^i_{(k)}(t)$,它与全变分 $\Delta q^i_{(k)}(t)$的关系为

$$\delta q^i_{(k)}(t)=\Delta q^i_{(k)}(t)-\dot q^i_{(k)}\Delta t \tag{7-1-21}$$

等时变分适合交换关系(7-1-3)式. 经过与一阶微商理论中类似的计算,可得

$$0=\Delta I = I[q'(t')] - I[q(t)] =$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\Delta t)\right]\mathrm{d}t \tag{7-1-22}$$

(7-1-22)式中第一项积分，由(7-1-16)式给出，于是有

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta I}{\delta q^i}\,\delta q^i\mathrm{d}t + \left[L\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}p_i^{(j-1)}\delta(\mathrm{D}^{(j-1)}q^i)\right]\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{7-1-23}$$

沿着系统运动的轨线，由运动方程(7-1-18)、(7-1-23)式得系统的运动守恒量

$$L\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}p_i^{(j-1)}\delta(\mathrm{D}^{j-1}q^i) = \mathrm{const} \tag{7-1-24}$$

或

$$L\tau^\sigma + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}p_i^{(j-1)}\mathrm{D}^{j-1}(\xi^{i\sigma} - \dot{q}^i\tau^\sigma) = \mathrm{const}$$
$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{7-1-25}$$

这样就得到了 Lagrange 量含高阶微商系统的 Noether 第一定理：如果系统的作用量(7-1-1)式在含 r 个参数的无穷小变换(7-1-19)式下不变，那么系统存在 r 个运动守恒量(7-1-25)式.

如果 L 至多仅含 $q^i(t)$ 的一阶微商，则

$$p_i^{(j-1)} = \begin{cases} 0 & (j = 2,3,\cdots,N_i) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} & (j=1) \end{cases} \tag{7-1-26}$$

那么(7-1-25)式可化为

$$L\tau^\sigma + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\xi^{i\sigma} - \dot{q}^i\tau^\sigma) = \mathrm{const} \tag{7-1-27}$$

这恰好是寻常一阶微商理论 Noether 第一定理的结果.

将上述一般结果应用于时间平移不变性和空间平移不变性，可分别导出相应的守恒量.

(1)当 L 不显含时间 t 时,作用量在时间平移变换下不变.时间平移变换为

$$t' = t + \varepsilon, q^{i\prime}(t') = q^i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{7-1-28}$$

此时 $\tau=1$, $\xi^i=0(i=1, 2, \cdots, n)$, 代入(7-1-25)式中得系统的守恒量

$$L - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i} p_i^{(j-1)}\mathrm{D}^j q^i = \mathrm{const} \tag{7-1-29}$$

如果 L 至多仅含 $q^i(t)$ 的一阶微商,那么(7-1-29)式可化为

$$L - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = L - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i = \mathrm{const} \tag{7-1-30}$$

(7-1-30)式为系统的 Hamilton 量守恒,(7-1-29)式为系统的广义 Hamilton量守恒.

(2)当 L 不显含 q^i 时,作用量在空间坐标平移变换下不变:

$$t' = t, \quad q^{i\prime}(t) = q^i(t) = \varepsilon\delta_{ij} \tag{7-1-31}$$

其中 δ_{ij}为 Kronecker 记号$(i,j=1,2,\cdots,n)$. 此时 $\tau=0$,由(7-1-25)式得系统的守恒量

$$p_i^{(0)} \equiv p_{i/1} = \sum_{k=0}^{N_i-1}(-\mathrm{D}^k)\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^{k+1}q^i)} = \mathrm{const} \tag{7-1-32}$$

下面讨论高阶微商系统的正则形式.系统的(正则)Hamilton 量记为

$$H(t;q_{(s)}^i, p_i^{(s)}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1} p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - L(t;q^i,\cdots,q_{(N_i)}^i) \tag{7-1-33}$$

其中最高阶微商 $q_{(N_i)}^i$由正则动量定义(7-1-14b)式来消去.在正则变量 $q_{(s)}^i$、$p_i^{(s)}$ 的任意变分下,系统 Hamilton 量的改变为

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}(q_{(s+1)}^i)\delta p_i^{(s)} + p_i^{(s)}\delta q_{(s+1)}^i) -$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\partial L}{\partial q_{(s)}^{i}}\delta q_{(s)}^{i} \tag{7-1-34}$$

由(7-1-14b)、(7-1-14c)式得

$$\delta H=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_{(0)}^{i}}\delta q_{(0)}^{i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-2}\left(p_i^{(s)}-\frac{\partial L}{\partial q_{(s+1)}^{i}}\right)\delta q_{(s+1)}^{i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}q_{(s+1)}^{i}\delta p_i^{(s)}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_{(0)}^{i}}\delta q_{(0)}^{i}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-2}\dot{p}_i^{(s+1)}\delta q_{(s+1)}^{i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}q_{(s+1)}^{i}\delta p_i^{(s)} \tag{7-1-35}$$

利用系统的 Lagrange 方程

$$\sum_{i=1}^{N_i-1}(-1)^s\mathrm{D}^s\left(\frac{\partial L}{\partial q_{(s)}^{i}}\right)=0 \tag{7-1-36a}$$

或

$$\frac{\partial L}{\partial q_{(0)}^{i}}=\dot{p}_i^{(0)}=\dot{p}_{i/1} \tag{7-1-36b}$$

可将(7-1-35)式化为

$$\delta H=-\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i^{(0)}\delta q_{(0)}^{i}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-2}\dot{p}_i^{(s+1)}\delta q_{(s+1)}^{i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-2}\dot{q}_{(s)}^{i}\delta p_i^{(s)}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\dot{p}_i^{(s)}\delta q_{(s)}^{i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\dot{q}_{(s)}^{i}\delta p_i^{(s)} \tag{7-1-37}$$

可见，δH 仅依赖于正则变量及其变分.

另一方面，又有

$$\delta H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^{i}}\delta q_{(s)}^{i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)} \tag{7-1-38}$$

比较(7-1-37)、(7-1-38)式得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta q_{(s)}^{i}}\delta q_{(s)}^{i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)}=0 \tag{7-1-39}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i_{(s)}}=-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H}{\partial q^i_{(s)}} \tag{7-1-40a}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}}=\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} \tag{7-1-40b}$$

由于正则变量的微分 $\delta q^i_{(s)}$ 和 $\delta q_i^{(s)}$ 彼此独立，由(7-1-39)式可得

$$\dot{q}^i_{(s)}=\frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} \tag{7-1-41a}$$

$$\dot{p}_i^{(s)}=-\frac{\partial H}{\partial q^i_{(s)}} \tag{7-1-41b}$$

$$(i=1,2,\cdots,n;s=0,1,2,\cdots,N_i-1)$$

(7-1-41)式为广义力学系统的广义正则方程. 它们是正则变量 $q^i_{(0)}(=q^i),q^i_{(1)}(=\dot{q}^i),\cdots,q^i_{(N_i-1)}$ 和 $p_i^{(0)},p_i^{(1)},\cdots,p_i^{(N_i-1)}$ 的一阶微分方程，共计 $2\sum_{i=1}^{n}N_i$ 个方程. 对所谓广义正规 Lagrange 量系统，正则方程(7-1-41)式和 Lagrange 方程(7-1-18)式是等价的.

从位形空间描述过渡到相空间描述，Hamilton 量(7-1-33)式是利用正则动量的定义(7-1-14b)式消去其中最高阶微商 $q^i_{(N_i)}$ 而得的. 由(7-1-14b)式如能解出所有的 $q^i_{(N_i)}$，并将其代入(7-1-33)式即可得到用正则变量给出的 Hamilton 量. 根据隐函数存在定理，由(7-1-14b)式可解出所有 $q^i_{(N_i)}$ 的条件是相应的行列式满足

$$\det\left|\frac{\partial p_i^{(N_i-1)}}{\partial q^j_{(N_j)}}\right|=\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial q^i_{(N_i)}\partial q^j_{(N_j)}}\right|\neq 0 \tag{7-1-42}$$

适合(7-1-42)式的 Lagrange 量称为广义正规 Lagrange 量. 如果(7-1-42)式为 0，那么由(7-1-14b)式就不能解出所有的 $q^i_{(N_i)}$. 从而，由 Lagrange 体制描述过渡到 Hamilton 体制描述，就不能按上述广义正规 Lagrange 量系统那样来实现，这种情形将在本节以后详细阐述.

§ 7-2 高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式

当广义力学系统的 Lagrange 量 $L(t;q_{(0)}^i,q_{(1)}^i,\cdots,q_{(N_i)}^i)$ 的广义 Hess 矩阵

$$[H_{ij}]=\left[\frac{\partial^2 L}{\partial q_{(N_i)}^i \partial q_{(N_j)}^j}\right]=\left[\frac{\partial p_i^{(N_i-1)}}{\partial q_{(N_j)}^j}\right] \tag{7-2-1}$$

的行列式为 0 时（即广义 Hess 矩阵是奇异的或退化的），该 Lagrange量称为广义奇异 Lagrange 量. 此时，由正则动量的定义式(7-1-14b)式不能完全解出所有广义坐标的最高阶导数，因而也就不能按 § 7-1 中的方式过渡到 Hamilton 形式.

由(7-1-14b)式有

$$p^{(N_i-1)}=p_{i/N_i}=\frac{\partial L}{\partial q_{(N_i)}^i}=f_i(t;q^k,q_{(1)}^k,\cdots,q_{(N_k)}^k)$$

$$(i=1,2,3,\cdots,n) \tag{7-2-2}$$

设广义 Hess 矩阵的秩为 $R(R<n)$，由(7-2-2)式可以解出 R 个广义坐标的最高阶微商，即

$$q_{(N_r)}^r=\varphi^r(t;p_r^{(N_r-1)},q_{(s)}^k,q_{(N_\rho)}^\rho)$$

$$(r=1,2,\cdots,R;\rho=R+1,R+2,\cdots,n) \tag{7-2-3}$$

将(7-2-3)式代入 Hamilton 量

$$H=p_i^{(s)}q_{(s+1)}^i-L(t;q_{(s)}^i,\cdots,q_{(N_i)}^i) \tag{7-2-4}$$

中（为简化记号，重复指标代表求和），则它应有如下形式：

$$H=H(t;q_{(s)}^i,q_{(N_\rho)}^\rho,p_i^{(s)}) \tag{7-2-5}$$

式中 $q_{(N_\rho)}^\rho$ 为未解出的那 $n-R$ 个最高阶微商. 由于 Hamilton 量(7-2-4)式中直接依赖于 $q_{(N_\rho)}^\rho$，并且经由 φ^r 间接依赖于$q_{(N_\rho)}^\rho$，按广义正则动量的定义有

$$\frac{\partial H}{\partial q^{\rho}_{(N_\rho)}} = \left(p_\rho^{(N_\rho - 1)} - \frac{\partial L}{\partial q^{\rho}_{(N_\rho)}} \right) +$$

$$\frac{\partial \varphi^r}{\partial q^{\rho}_{(N_\rho)}} \left(p_r^{(N_r - 1)} - \frac{\partial L}{\partial q^{r}_{(N_r)}} \right) = 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}6)$$

即利用广义正则动量的定义,系统的 Hamilton 量与最高阶微商 $q^{\rho}_{(N_\rho)}$无关.

$$p_i^{(N_i - 1)} = \frac{\partial L}{\partial q^{i}_{(N_i)}} \rightarrow H = H(t; q^i_{(s)}, p_i^{(s)}) \qquad (7\text{-}2\text{-}7)$$

设广义 Hess 矩阵的秩为 R,由(7-2-2)式可解出 R 个 $q^r_{(N_r)}$ $(r=1,2,\cdots,R)$,即(7-2-3)式. 将(7-2-3)式代入(7-2-2)式由剩下的 $n-R$ 方程,可得

$$p_\rho^{(N_\rho - 1)} = \Psi_\rho(t; q^i_{(s)}, p_r^{(N_r - 1)})$$
$$(\rho = R+1, \cdots, n) \qquad (7\text{-}2\text{-}8)$$

(7-2-8)式中不再含广义坐标的最高阶微商 $q^{\rho}_{(N_\rho)}$,因为不然的话,从(7-2-2)式还可解出更多 $q^{r'}_{(N_{r'})}$$(r'=1,2,\cdots,R'>R)$,这与假设广义 Hess 矩阵的秩为 R 矛盾. 将(7-2-8)式写为

$$\Phi_a^0(t; q^i_{(s)}, p_i^{(N_i - 1)}) = p_a^{(Na-1)} - \Psi_a(t; q^i_{(s)}, p^{(N_r - 1)}) \approx 0$$
$$(a = R+1, R+2, \cdots, n) \qquad (7\text{-}2\text{-}9)$$

(7-2-9)式为广义奇异 Lagrange 量(广义力学)系统的初级约束,此约束来源于 Lagrange 量的奇异性和系统正则动量的定义. 得出此初级约束,没有利用系统的动力学方程. 初级约束和 Hamilton 量中均不含广义坐标的最高阶微商$q^i_{(N_i)}$. 可见,广义奇异Lagrange量系统,在相空间描述时为广义约束 Hamilton 系统.

此外,从广义动量的定义式(7-1-14c)也可能导致正则变量间存在约束[15],但 Saito 等人指出这些约束为次级约束[19].

下面讨论此约束 Hamilton 系统的正则方程. 将(7-2-3)式代入(7-1-33)式,并由(7-2-9)式,让 $p_a^{(N_a-1)} = \Psi_a + \Phi_a^0$,得

$$H(t;q^i_{(s)},p^{(s)}_i) = H_c(t;q^i_{(s)},p^{(s)}_i) + q^a_{(N_a)}\Phi^0_a$$
$$(a = 1,2,\cdots,n-R) \qquad (7\text{-}2\text{-}10)$$

式中

$$H_c(t;q^i_{(s)},p^{(s)}_i) = p^{(N_r-1)}_r \varphi^r(t;p^{(N_{r'}-1)}_{r'},q^i_{(s)},q^\rho_{(N_\rho)}) +$$
$$\Psi_\rho(t;q^i_{(s)},p^{(N_r-1)}_r)q^\rho_{(N_\rho)} +$$
$$p^{(s-1)}_i q^i_{(s)} - L(t;q^r_{(s)},q^r_{(N_r)},q^\rho_{(N_\rho)}) \qquad (7\text{-}2\text{-}11)$$

(7-2-11)式中第三项对 s 求和由 1 到 N_i-1 并将该式关于正则变量 $q^i_{(s)}$和 $p^{(s)}_i$ 求微商，注意 H_c 通过 φ^r 和 Ψ_ρ 隐函 $q^i_{(s)}$和 $p^{(s)}_i$，于是得

$$\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}} = p^{(s-1)}_i + q^\rho_{(N_\rho)}\frac{\partial \Psi_\rho}{\partial q^i_{(s)}} - \frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}} \qquad (7\text{-}2\text{-}12a)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i} = q^i_{(s+1)} + q^\rho_{(N_\rho)}\frac{\partial \Psi_\rho}{\partial p^{(s)}_i} \qquad (7\text{-}2\text{-}12b)$$

对 $s=0$，由 Lagrange 方程(7-1-36b)式用 $\dot{p}^{(0)}_i$ 代替 $\partial L/\partial q^i_{(0)}$；对 $s>0$，用(7-1-14c)式，并用约束关系(7-2-9)式代替 Ψ_ρ，于是得

$$\dot{q}^i_{(s)} \approx \frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i} + \lambda_a\frac{\partial \Phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i} \qquad (7\text{-}2\text{-}13a)$$

$$\dot{p}^{(s)}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}} - \lambda_a\frac{\partial \Phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}} \qquad (7\text{-}2\text{-}13b)$$

$$(i=1,2,\cdots,n;s=0,1,\cdots,N_i-1)$$

式中 $\lambda^a=-q^a_{(N_a)}$. 方程(7-2-13)式又可写为

$$\dot{q}^i_{(s)} \approx \frac{\partial H_T}{\partial p^{(s)}_i} \qquad (7\text{-}2\text{-}14a)$$

$$\dot{p}^{(s)}_i \approx -\frac{\partial H_T}{\partial q^i_{(s)}} \qquad (7\text{-}2\text{-}14b)$$

其中 $H_T=H_c+\lambda^a\Phi^0_a$ 为总 Hamilton 量.(7-2-14)式为高阶微商奇异 Lagrange 系统的广义正则方程. 文献[19]中指出，这组方程和 Lagrange 方程等价. 方程(7-2-14)式是二阶微商奇异 Lagrange 量

系统正则方程的推广[32].

在上节中对广义正规 Lagrange 量的广义力学系统，已得到(7-1-37)式. 从推导过程可以看出，无论是广义正规 Lagrange 量系统或广义奇异 Lagrange 量系统，(7-1-37)式总是成立的，也就是说，Hamilton 量的变分仅依赖于正则变量 $q^i_{(s)}$和 $p_i^{(s)}$ 的变分 $\delta q^i_{(s)}$ 和 $\delta p_i^{(s)}$. 于是对广义奇异 Lagrange 量系统，仍可导出(7-1-39)式，即

$$-\left(\dot{p}_i^{(s)}+\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}\right)\delta q^i_{(s)}+\left(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}\right)\delta p_i^{(s)}=0 \quad (7\text{-}2\text{-}15)$$

但对于奇异 Lagrange 量系统，正则变量 $q^i_{(s)}$和 $p_i^{(s)}$ 彼此间不是独立的，它们之间存在约束条件的限制，即正则变量应满足约束条件(7-2-9)式，正则变量的变分适合

$$\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q^i_{(s)}}\delta q^i_{(s)}+\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)}=0 \quad (7\text{-}2\text{-}16)$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)(a=1,2,\cdots,n-R)$，结合(7-2-15)、(7-2-16)式，得

$$-\left(\dot{p}_i^{(s)}+\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}+\lambda^a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q^i_{(s)}}\right)\delta q^i_{(s)}+$$
$$\left(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}-\lambda^a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\right)\delta p_i^{(s)}=0 \quad (7\text{-}2\text{-}17)$$

选取 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)(a=1,2,\cdots,n-R)$，使其适合方程：

$$\dot{q}^i_{(s)}=\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}+\lambda^a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}} \quad (7\text{-}2\text{-}18\text{a})$$

$$\dot{p}_i^{(s)}=-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}-\lambda^a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q^i_{(s)}} \quad (7\text{-}2\text{-}18\text{b})$$

这样(7-2-17)式中剩下的方程中的 $\delta q^i_{(s)}$和 $\delta p_i^{(s)}$ 彼此是独立的，从而(7-2-17)式中 $\delta q^i_{(s)}$和 $\delta p_i^{(s)}$ 前面的系数应为 0，即这些系数仍适合(7-2-18)式，即是说，所有的 $q^i_{(s)}$、$p_i^{(s)}$、$\lambda^a(t)$满足方程：

$$\dot{q}^i_{(s)} \approx \frac{\partial H_T}{\partial p_i^{(s)}}, \quad \dot{p}_i^{(s)} \approx -\frac{\partial H_T}{\partial q^i_{(s)}}, \quad \Phi^0_a(t; q^i_{(s)}, p_i^{(s)}) \approx 0$$

$$(i = 1,2,\cdots,n; s = 0,1,2,\cdots,N_i - 1; a = 1,2,\cdots,n-R) \tag{7-2-19}$$

其中 $H_T = H_c + \lambda^a \Phi^0_a$ 为总 Hamilton 量.(7-2-19)式为高阶微商奇异Lagrange量系统的广义正则方程.与(7-2-14)式对比,可见Lagrange乘子 $\lambda^a(t)$相应于未解出的广义坐标最高阶微商 $q^a_{(N_a)}$.

正则变量 $q^i_{(s)}$、$p_i^{(s)}$($i=1,2,\cdots,n; s=0,1,2,\cdots,N_i-1$)和时间 t 的任意函数 $F(t; q^i_{(s)}, p_i^{(s)})$ 的时间全微商为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^i_{(s)}}\dot{q}^i_{(s)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i^{(s)}}\dot{p}_i^{(s)} \tag{7-2-20}$$

将(7-2-19)式代入(7-2-20)式,得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\} + \lambda^a\{F, \Phi^0_a\} \tag{7-2-21}$$

其中广义 Poisson 括号定义为

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i_{(s)}}\frac{\partial G}{\partial p_i^{(s)}} - \frac{\partial F}{\partial p_i^{(s)}}\frac{\partial G}{\partial q^i_{(s)}} \tag{7-2-22}$$

基本广义 Poisson 括号为

$$\{q^i_{(r)}, p_j^{(s)}\} = \delta^i_j \delta^s_r, \quad \{q^i_{(r)}, q^j_{(s)}\} = 0, \quad \{p_i^{(r)}, p_j^{(s)}\} = 0$$

$$(i,j = 1,2,\cdots,n; r,s = 0,1,2,\cdots,N_i - 1) \tag{7-2-23}$$

初级约束的自洽性条件要求约束随时间演化是稳定的.由(7-2-21)式有

$$\frac{\mathrm{d}\Phi^0_{a'}}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial \Phi^0_{a'}}{\partial t} + \{\Phi^0_{a'}, H_c\} + \lambda^a\{\Phi^0_{a'}, \Phi^0_a\} \approx 0$$

$$(a = 1,2,\cdots,n - R) \tag{7-2-24}$$

(7-2-24)式可能为一恒等式,或者可能确定 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)$,

或者导致有别于初级约束的正则变量间的新关系式. 将这些正则变量间的新关系记为

$$\Phi_a^1(t;q_{(s)}^i,p_i^{(s)}) \approx 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}25)$$

(7-2-25)式称为次级约束. 由次级约束的自洽性条件可导出其他次级约束,即

$$\Phi_a^k = \frac{\partial \Phi_a^{k-1}}{\partial t} + \{\Phi_a^{k-1}, H_T\} \approx 0$$

这样,从每一个初级约束 Φ_a^0 出发,均可导出相应的次级约束,这个程序直至

$$\Phi_a^{m+1} = \frac{\partial \Phi_a^m}{\partial t} + \{\Phi_a^m, H_T\} = c_{ak}^b \Phi_b^k \qquad (k \leqslant m)$$

为止.

所有约束(初级和次级)可分为两类:一个约束 Φ_a 如果和所有其他约束 Φ_b 均适合 $\{\Phi_a,\Phi_b\}\approx 0(\mathrm{mod}\ \Phi_c)$,则称 Φ_a 为第一类约束(记号 $A\approx 0(\mathrm{mod}\ \Phi_c)$ 代表在约束 $\Phi_c\approx 0$ 的超曲面上,等式 $A=0$ 成立);否则,称第二类约束. 全部约束可以通过线性组合用其等价的约束代替,这种组合使尽可能多的约束变为第一类约束.

对第二类约束 $\theta_i\approx 0$,可引入 Dirac 括号,即

$$\{F,G\}_D = \{F,G\} - \{F,\theta_i\}c_{ij}^{-1}\{\theta_j,G\}$$

式中 c_{ij}^{-1} 满足 $\{\theta_i,\theta_j\}c_{jk}^{-1} = \delta_i^k$. 在 Dirac 括号下,由于对任意动力学变量 F,均有 $\{\theta_i,F\}_D=0$. 因此,第二类约束可视为强等于 0,即 $\theta_i\simeq 0$.

§7-3 约束乘子的确定

本节将动力学变量的演化方程(7-2-21)式写为另外的形式,阐明广义正则方程(7-2-19)式中与约束相联系的乘子 $\lambda^a(t)$ 被确

定的情况.

设初级约束 $\Phi_a^0 \approx 0$ 中既含第一类约束 $\Lambda_{a_1} \approx 0(a_1=1,2,\cdots,A)$，又含第二类约束 $\theta_{b_1} \approx 0(b_1=1,2,\cdots,B;A+B=n-R)$. 次级约束中的第一类约束和第二类约束分别为 $\Lambda_{a_2} \approx 0$ 和 $\theta_{b_2} \approx 0$. 即所有第一类约束函数为 $\Lambda_a=(\Lambda_{a_1},\Lambda_{a_2})$，所有第二类约束函数为 $\theta_b=(\theta_{b_1},\theta_{b_2})$. 正则方程中的 $\lambda^a\Phi_a^0$ 项可写为

$$\lambda^a\Phi_a^0 = v_{a_1}\Lambda_{a_1} + v_{b_1}\Lambda_{b_1} \tag{7-3-1}$$

将(7-3-1)式代入(7-2-21)式中，得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H_c\} + v_{a_1}\{F,\Lambda_{a_1}\} + v_{b_1}\{F,\theta_{b_1}\} \tag{7-3-2}$$

对第一类约束和第二类约束分别写出自洽性条件

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_a}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial \Lambda_a}{\partial t} + \{\Lambda_a,H_c\} \approx 0 \tag{7-3-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \{\theta_b,H_c\} + v_{b_1}\{\theta_b,\theta_{b_1}\} \approx 0 \tag{7-3-4}$$

从方程(7-3-3)、(7-3-4)式可以确定约束乘子. 与初级第一类约束相联系的乘子 v_{a_1} 不出现在方程(7-3-3)式中，表明乘子 v_{a_1} 完全不能确定. 此不定乘子的数目等于初级第一类约束的个数.

为了确定 v_{b_1}，需先写出第二类约束的 Poisson 括号构成的矩阵，即

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \{\theta_{b_1},\theta_{b'_1}\} & \{\theta_{b_1},\theta_{b_2}\} \\ \{\theta_{b_2},\theta_{b_1}\} & \{\theta_{b_2},\theta_{b'_2}\} \end{bmatrix} \tag{7-3-5}$$

其矩阵元记为

$$c_{bb'} = \{\theta_b,\theta_{b'}\} \tag{7-3-6}$$

$\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵记为 $\boldsymbol{C}^{-1}$，其矩阵元 $c_{bb'}^{-1}$ 适合

$$c_{bb'}c_{b'b''}^{-1} = \delta_{bb''} \tag{7-3-7}$$

由(7-3-4)、(7-3-7)式得

$$v_{b_1} \approx -c_{b_1b}^{-1}\left(\{\theta_b,H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right) \tag{7-3-8}$$

由(7-3-3)、(7-3-7)式还可得

$$c_{b_2 b}^{-1}\left(\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right) \approx 0 \qquad (7\text{-}3\text{-}9)$$

将 v_{b_1}的表达式(7-3-8)式代入(7-3-2)式,得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\} + v_{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - $$
$$c_{b_1 b}^{-1}\left(\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right)\{F, \theta_{b_1}\} \qquad (7\text{-}3\text{-}10)$$

此式也可表示为另一形式. 用$\{F, \theta_{b_2}\}$乘(7-3-9)式,然后再对 b_2 求和,将所得结果加在(7-3-10)式右端,得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\} + v_{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - $$
$$c_{b' b}^{-1}\left(\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right)\{F, \theta_{b'}\} \qquad (7\text{-}3\text{-}11)$$

(7-3-11)式中包含了所有第二类约束 θ_b,与初级第一类约束 Λ_{a_1}相联系的乘子 v_{a_1}是完全任意的.

利用 Dirac 括号,(7-3-11)式又可写为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\}_{\mathrm{D}} + v_{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - $$
$$\{F, \theta_b\} c_{bb'}^{-1} \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial t} \qquad (7\text{-}3\text{-}12)$$

§7-4 第一类约束与规范生成元

相空间任意函数 F 对时间的全微商由(7-3-12)式给出. 设 δt 为任一小量,将 F 做 Taylor 展开,由(7-3-12)式得

$$F_v(\delta t) = F_v(0) + \delta t\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\}_{\mathrm{D}} + \right.$$
$$\left. v_{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - \{F, \theta_b\} c_{bb'}^{-1} \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial t}\right]_{t=0} \qquad (7\text{-}4\text{-}1)$$

其中 F_v 代表与第一类约束相联系的任意乘子取 v_{a_1} 时函数 F 的值. 当此任意约束乘子取 v'_{a_1} 时,同样可写出与(7-4-1)式类似的表达式. 将约束乘子 v_{a_1} 和 $v_{a'_1}$ 联系的两表达式相减,得

$$\delta F = \varepsilon_{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} \tag{7-4-2}$$

式中

$$\varepsilon_{a_1} = \delta t(v_{a_1}(0) - v'_{a_1}(0)) \tag{7-4-3}$$

可见,对高阶微商奇异 Lagrange 量并显含时间的系统,选取与第一类初级约束相联系的不同乘子所得到的 F_v 和 $F_{v'}$ 之间可以通过一个无穷小正则变换(或称为规范变换)联系起来,此正则变换不影响物理态. 正则变换的母函数(或称生成元)为初级第一类约束 Λ_{a_1}. 由(7-4-2)式系统的正则变换为

$$\delta q^i_{(s)} = \varepsilon_{a_1}\{q^i_{(s)}, \Lambda_{a_1}\} \tag{7-4-4a}$$

$$\delta p_i^{(s)} = \varepsilon_{a_1}\{p_i^{(s)}, \Lambda_{a_1}\} \tag{7-4-4b}$$

由此可知,对高阶微商奇异 Lagrange 量并显含时间的系统,初级第一类约束 Λ_{a_1} 可以作为规范变换的生成元(简称规范生成元),由它们产生的无穷小正则变换,即导致正则变量 $q^i_{(s)}$ 和 $p_i^{(s)}$ 的改变,这种改变不影响物理态.

按(7-4-2)式相继进行两次正则变换,即先做参数为 ε_{a_1} 的变换,再做参数为 $\omega_{a'_1}$ 的变换,得

$$\begin{aligned}\overline{F} = & F(0) + \varepsilon_{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} + \\ & \omega_{a'_1}\{F(0) + \varepsilon_{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\}, \Lambda_{a'_1}\}\end{aligned} \tag{7-4-5}$$

将上述两变换次序倒过来做,得

$$\begin{aligned}\overline{F} = & F(0) + \omega_{a'_1}\{F, \Lambda_{a'_1}\} + \\ & \varepsilon_{a_1}\{F(0) + \omega_{a'_1}\{F, \Lambda_{a'_1}\}, \Lambda_{a_1}\}\end{aligned} \tag{7-4-6}$$

将(7-4-5)、(7-4-6)式相减,利用 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式,得

$$\delta F = \varepsilon_{a_1}\omega_{a'_1}\{F, \{\Lambda_{a_1}, \Lambda_{a'_1}\}\} \tag{7-4-7}$$

可见，两个初级第一类约束的 Poisson 括号$\{\Lambda_{a_1},\Lambda_{a_1'}\}$也可作为无穷小正则变换的生成元，生成物理态之间的等价变换. 两个第一类约束的 Poisson 括号仍为第一类约束，即$\{\Lambda_{a_1},\Lambda_{a_1'}\}$为第一类约束，此第一类约束可以是初级第一类约束，也可以是次级第一类约束. 这样就很自然的将 Dirac 猜想推广到显含时间的高阶微商奇异 Lagrange 量系统，即所有第一类约束(初级和次级约束)均是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换.

如果此时 Dirac 猜想成立，次级第一类约束也应像初级第一类约束那样加入到 Hamilton 量中. 对于仅含第一类约束的系统，设所含的初级第一类约束为 $\Lambda_{a_1}(a_1=1,2,\cdots,n-R)$，次级第一类约束为 $\Lambda_{a_2}(a_2=1,2,\cdots,B')$. 系统的广义正则方程应由扩展 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{E}}=H_{\mathrm{T}}+\lambda^{a_2}\Lambda_{a_2}=H_{\mathrm{c}}+\lambda^{a_1}\Lambda_{a_1}+\lambda^{a_2}\Lambda_{a_2} \qquad (7\text{-}4\text{-}8)$$

导出，其中 λ^{a_1}和 λ^{a_2}为任意的 Lagrange 乘子.

由总 Hamilton 导致的正则方程可与 Lagrange 方程等价，而由扩展 Hamilton 导致的正则方程似乎不能与 Lagrange 方程等价. 一般来说，Dirac 猜想是不成立的，这个问题在后面还要举反例来说明. 但是，对一些重要的物理系统，Dirac 猜想尚未导致不合理的结果.

§7-5 规范生成元

规范理论在现代场论中占十分重要的地位，这个理论具有定(局)域规范不变性，该变换中含任意函数，如杨-Mills 理论、引力和超引力理论等. 规范不变的 Lagrange 量是奇异的. 对于一个奇异 Lagrange 量系统，分析系统所含的 Dirac 约束，从规范对称性出发，可以构造与第一类约束相联系的规范对称生成元，从而给出规范变换的具体形式. 对二阶微商奇异 Lagrange 量系统的规范生

成元的构成已作了研究[32,33]，这里假设系统仅含第一类约束，来研究含高阶微商奇异 Lagrange 量系统的规范对称性及其对应的生成元，并假设 Lagrange 量不显含时间 t. 其出发点是在规范变换下，保持高阶微商奇异 Lagrange 量系统的广义正则方程

$$\left.\begin{aligned} &\dot{q}^i_{(s)} = \frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial p_i^{(s)}}, \qquad \dot{p}_i^{(s)} = -\frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial q^i_{(s)}} \\ &\Phi_a^0(q^i_{(s)}, p_i^{(s)}) = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \end{aligned}\right\} \tag{7-5-1}$$

不变，来给出该系统规范生成元的构成. 其中

$$H_{\mathrm{T}} = H_{\mathrm{c}} + \lambda^a \Phi_a^0 \tag{7-5-2}$$

式中：Φ_a^0 为初级约束；$\lambda^a(t)$ 为 Lagrange 乘子. 这里的讨论是前面工作[33]的推广.

现考虑无穷小规范变换：

$$\left.\begin{aligned} &\bar{t} = t \\ &\bar{\lambda}^a(t) = \lambda^a(t) + \delta\lambda^a(t) \\ &\bar{q}^i_{(s)}(t) = q^i_{(s)}(t) + \xi^i_{(s)}(t) \\ &\bar{p}_i^{(s)} = p_i^{(s)}(t) + \eta_i^{(s)}(t) \end{aligned}\right\} \tag{7-5-3}$$

假设"轨线"$(q^i_{(s)}, p_i^{(s)}, \lambda^a)$和变更后的"轨线"$(\bar{q}^i_{(s)}, \bar{p}_i^{(s)}, \bar{\lambda}^a)$均满足正则方程(7-5-1)式，对$(\bar{q}^i_{(s)}, \bar{p}_i^{(s)}, \bar{\lambda}^a)$的"轨线"方程关于小量 $\delta\lambda^a$、$\xi^i_{(s)}$、$\eta_i^{(s)}$、$\dot{\xi}^i_{(s)}$和 $\dot{\eta}_i^{(s)}$ 展开，并利用$(q^i_{(s)}, p_i^{(s)}, \lambda^a)$适合的方程(7-5-1)式，可得

$$\dot{\xi}^i_{(s)} = \frac{\partial^2 H_{\mathrm{T}}}{\partial p_i^{(s)} \partial q^j_{(r)}} \xi^j_{(r)} + \frac{\partial^2 H_{\mathrm{T}}}{\partial p_i^{(s)} \partial p_j^{(r)}} \eta_j^{(r)} \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{7-5-4a}$$

$$\dot{\eta}_i^{(s)} = -\left(\frac{\partial^2 H_{\mathrm{T}}}{\partial q^i_{(s)} \partial q^j_{(r)}} \xi^j_{(r)} + \frac{\partial^2 H_{\mathrm{T}}}{\partial q^i_{(s)} \partial p_j^{(r)}} \eta_j^{(r)} \right) \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{7-5-4b}$$

$$\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q^i_{(s)}} \xi^i_{(s)} + \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(r)}} \eta_i^{(r)} = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{7-5-4c}$$

(7-5-4)式给出了变更后"轨线"具有规范不变的充要条件.

在规范场论中，规范变换含任意函数及其微商，考虑正则变量

的变更是由相空间的生成元 $G(q_{(s)},p^{(s)})$ 产生. 设 G 的一般形式为

$$G = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{(k)} G_k \quad \left(\varepsilon^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \varepsilon(t) \right) \tag{7-5-5}$$

式中 $\varepsilon(t)$ 为任意函数. 这样 $q^i_{(s)}$和 $p_i^{(s)}$ 的变更为

$$\xi^i_{(s)} = \delta q^i_{(s)} = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{(k)} \{q^i_{(s)}, G_k\} = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{(k)} \frac{\partial G_k}{\partial p_i^{(s)}} \tag{7-5-6a}$$

$$\eta_i^{(s)} = \delta p_i^{(s)} = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{(k)} \{p_i^{(s)}, G_k\} = - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{(k)} \frac{\partial G_k}{\partial q^i_{(s)}} \tag{7-5-6b}$$

将(7-5-6)式代入(7-5-4)式,由于 $\varepsilon(t)$ 的任意性,得

$$\frac{\partial}{\partial p_i^{(s)}} (\{G_k, H_{\mathrm{T}}\} + G_{k-1}) = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a) \tag{7-5-7a}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i_{(s)}} (\{G_k, H_{\mathrm{T}}\} + G_{k-1}) = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a) \tag{7-5-7b}$$

$$\{G_k, \Phi^0_a\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a) \tag{7-5-7c}$$

由于正则变量变分后的“轨线”保持在约束超曲面上,在(7-5-7c)式中对次级约束亦应有$\{G_k,\Phi^n_a\}=0$. 因此,G_k 可取为第一类约束,又因假设系统仅有第一类约束,在(7-5-7a)、(7-5-7b)式中可用 H_{c} 来代替 H_{T},这样可得递推关系

$$\{G_0, H_{\mathrm{c}}\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a) \tag{7-5-8a}$$

$$G_{k-1} + \{G_k, H_{\mathrm{c}}\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a) \tag{7-5-8b}$$

$$G_m = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a) \tag{7-5-8c}$$

由此可知,G_m 为第一类初级约束,所有 G_k 均为第一类约束. 根据递推关系(7-5-8b)式,G_{k-1}可由 G_k 导出,直到 G_0 适合(7-5-8a)式为止,这样除 χ^n-型约束外[33],求出所有 G_k 后,由(7-5-5)式就得到规范对称的生成元 G. 下面给出广义力学应用中的实例.

现考虑含高阶微商 Lagrange 量系统

$$L = q^1_{(3)} q^2_{(3)} + q^1_{(2)} (q^2_{(2)} - q^3_{(2)}) + q^1_{(1)} (q^2_{(1)} - q^3_{(1)}) - q^1_{(0)} q^3_{(0)}$$

下面求出规范不变的定域变换. $q^i_{(s)}(s=0,1,2)$的正则动量分别为

$$
\left.\begin{aligned}
&p_1^{(2)} = \frac{\partial L}{\partial q_{(3)}^1} = q_{(3)}^2,\quad p_2^{(2)} = \frac{\partial L}{\partial q_{(3)}^2} = q_{(3)}^1 \\
&p_{(3)}^2 = \frac{\partial L}{\partial q_{(3)}^3} = 0 \\
&p_1^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial q_{(2)}^1} - \dot{p}_1^{(2)} = q_{(2)}^2 - q_{(2)}^3 - \dot{p}_1^{(2)} = \\
&\qquad q_{(2)}^2 - q_{(2)}^3 - q_{(4)}^2 \\
&p_2^{(1)} = q_{(2)}^1 - \dot{p}_2^{(2)} = q_{(2)}^1 - q_{(4)}^1 \\
&p_3^{(1)} = - q_{(2)}^1 \\
&p_1^{(0)} = q_{(1)}^2 - q_{(1)}^3 - \dot{p}_1^{(1)} = \\
&\qquad q_{(1)}^2 - q_{(1)}^3 - q_{(3)}^2 + q_{(3)}^3 - q_{(5)}^2 \\
&p_2^{(0)} = q_{(1)}^1 - \dot{p}_2^{(1)} = q_{(1)}^1 - q_{(3)}^1 + q_{(5)}^1 \\
&p_3^{(0)} = - q_{(1)}^1 - \dot{p}_{(3)}^1 = - q_{(1)}^1 + q_{(3)}^1
\end{aligned}\right\} \tag{7-5-9}
$$

系统的 Hamilton 量

$$
\begin{aligned}
H = &\sum_{s=0}^{2} p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - L = \\
&p_1^{(2)} p_2^{(2)} + p_1^{(1)} q_{(2)}^1 + p_2^{(1)} q_{(2)}^2 + p_3^{(1)} q_{(2)}^3 + p_1^{(0)} q_{(1)}^1 + \\
&p_2^{(0)} q_{(1)}^2 + p_3^{(0)} q_{(1)}^3 + q_{(2)}^1 (q_{(2)}^3 - q_{(2)}^2) + \\
&q_{(1)}^1 (q_{(1)}^3 - q_{(1)}^2) + q_{(0)}^1 q_{(0)}^3
\end{aligned} \tag{7-5-10}
$$

系统仅含一个初级约束，即

$$
\Phi^0 = p_3^{(2)} \approx 0 \tag{7-5-11}
$$

系统的总 Hamilton 量

$$
H_{\mathrm{T}} = H + \lambda \Phi^0 \tag{7-5-12}
$$

式中 λ 为 Lagrange 乘子. 由 Φ^0 的相容性条件给出的次级约束为

$$
\Phi^1 = \{\Phi^0, H_{\mathrm{T}}\} = - p_3^{(1)} - q_{(2)}^1 \approx 0 \tag{7-5-13}
$$

由次级约束的相容性条件给出的其他次级约束为

$$
\Phi^2 = \{\Phi^1, H_{\mathrm{T}}\} = p_3^{(0)} + q_{(1)}^1 - p_2^{(2)} \approx 0 \tag{7-5-14}
$$

$$\Phi^3 = \{\Phi^2, H_T\} = - q^1_{(0)} + p_2^{(1)} \approx 0 \qquad (7\text{-}5\text{-}15)$$

$$\Phi^4 = \{\Phi^3, H_T\} = - p_2^{(0)} \approx 0 \qquad (7\text{-}5\text{-}16)$$

所有约束 Φ^0、Φ^1、Φ^2、Φ^3、Φ^4 均为第一类约束.

现在利用(7-5-8)式的递推关系来构造规范变换的生成元,并取 $G_4 = \Phi^0$,则由 $G_3 + \{G_4, H\} = 0$ 得

$$G_3 = - \Phi^1 \qquad (7\text{-}5\text{-}17)$$

又由 $G_2 + \{G_3, H_c\} = 0$ 得

$$G_2 = \Phi^2 \qquad (7\text{-}5\text{-}18)$$

再由 $G_1 + \{G_2, H_c\} = 0$ 得

$$G_1 = - \Phi^3 \qquad (7\text{-}5\text{-}19)$$

最后,由 $G_0 + \{G_1, H_c\} = 0$ 得

$$G_0 = \Phi^4 \qquad (7\text{-}5\text{-}20)$$

而 $\{G_0, H_c\} = 0$,这样,按(7-5-5)式,所求得的规范变换的生成元为

$$G = \varepsilon(t)\Phi^4 - \dot{\varepsilon}(t)\Phi^3 + \ddot{\varepsilon}(t)\Phi^2 - \dddot{\varepsilon}(t)\Phi^1 + \ddddot{\varepsilon}(t)\Phi^0 \qquad (7\text{-}5\text{-}21)$$

由这个生成元产生的规范变换为

$$\left.\begin{aligned} \delta q^1_{(s)} &= \{q^1_{(s)}, G\} = 0 \\ \delta q^2_{(s)} &= \{q^2_{(s)}, G\} = \mathrm{D}^s \varepsilon(t) \quad (\mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t) \\ \delta q^3_{(s)} &= \{q^3_{(s)}, G\} = \mathrm{D}^{s+1} \varepsilon(t) \\ \delta p_1^{(s)} &= \{p_1^{(s)}, G\} = - \mathrm{D}^{s+1} \varepsilon(t) \\ \delta p_2^{(s)} &= \delta p_3^{(s)} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}5\text{-}22)$$

在这个规范变换下,系统的 Lagrange 量改变一全微商项,即

$$\delta L = - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q^1_{(2)}\dddot{\varepsilon} + q^1_{(0)}\ddot{\varepsilon} + \dot{q}^1_{(0)}\dot{\varepsilon}) \qquad (7\text{-}5\text{-}23)$$

而系统的作用量则是规范不变的.

§7-6 经典正则对称性

现讨论有限自由度高阶微商系统. 设系统的 Lagrange 量为 $L(q^i_{(0)}, q^i_{(1)}, \cdots, q^i_{(N)})$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $q^i_{(0)}=q^i$, $q^i_{(s)}=\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}q^i$ $(s=0,1,\cdots,N)$, 并设 Lagrange 量的广义 Hess 矩阵

$$[H_{ij}]=\left[\frac{\partial^2 L}{\partial q^i_{(N)}\partial q^i_{(N)}}\right] \tag{7-6-1}$$

是退化的, 它的秩为 $R(<n)$. 利用 Qstrogradsky 变换引入正则动量

$$p_i^{(N-1)}=\frac{\partial L}{\partial q^i_{(N)}} \tag{7-6-2a}$$

$$p_i^{(s-1)}=\frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}}-\dot{p}_i^{(s)} \quad (s=1,2,\cdots,N-1) \tag{7-6-2b}$$

和正则 Hamilton 量

$$H_c=\sum_{s=0}^{N-1}p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-L \tag{7-6-3}$$

(7-6-3)式中的最高阶微商 $q^i_{(N)}$, 由(7-6-2a)式解出的 $q^i_{(N)}$ 消去. 由于 Hess 矩阵$[H_{ij}]$的秩为 R, 从(7-6-2a)式中的 R 个方程可解出 R 个 $q^i_{(N)}$, 将这些解出的 $q^i_{(N)}$ 代入(7-6-2a)式剩下的方程, 正则变量间存在$n-R$个初级约束, 即

$$\Phi_a^0(q^i_{(s)}, p_i^{(s)})\approx 0 \quad (a=1,2,\cdots,n-R) \tag{7-6-4}$$

系统的广义正则方程可写为

$$\dot{q}^i_{(s)}\approx\frac{\partial H_T}{\partial p_i^{(s)}}\approx\{q^i_{(s)}, H_T\} \tag{7-6-5a}$$

$$\dot{p}_i^{(s)}\approx-\frac{\partial H_T}{\partial q^i_{(s)}}\approx\{p_i^{(s)}, H_T\} \tag{7-6-5b}$$

式中 $H_T=H_c+\lambda^a\Phi_a^0$. 其中: H_T 为总 Hamilton 量; $\lambda^a(t)$ 为

Lagrange 乘子.

下面讨论高阶微商奇异 Lagrange 系统在相空间中的经典正则对称性质[33].

现考虑增广相空间中的有限连续群下的无穷小变换：

$$\left.\begin{aligned}
&t \to t' = t + \Delta t = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma(t; q_{(s)}, p_i^{(s)}) \\
&q_{(s)}^i(t) \to q_{(s)}^{i\prime}(t') = q_{(s)}^i(t) + \Delta q_{(s)}^i(t) = \\
&\qquad\qquad q_{(s)}^i(t) + \varepsilon_\sigma \xi_{(s)}^{i\sigma}(t; q_{(s)}, p^{(s)}) \\
&p_i^{(s)}(t) \to p_i^{(s)\prime}(t') = p_i^{(s)}(t) + \Delta p_i^{(s)}(t) = \\
&\qquad\qquad p_i^{(s)}(t) + \varepsilon_\sigma \eta_i^{(s)\sigma}(t; q_{(s)}, p^{(s)})
\end{aligned}\right\} \tag{7-6-6}$$

式中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小参量. 假设正则 Lagrange 量

$$L^{\mathrm{p}} = \sum_{s=0}^{N-1} p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - H_{\mathrm{c}}$$

在(7-6-6)式变换下，适合 $\delta L^{\mathrm{p}} = \varepsilon_\sigma \mathrm{D}\Lambda^\sigma$，其中 $\Lambda^\sigma = \Lambda^\sigma(t; q_{(s)}, p^{(s)})$，$\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 由正则作用量(略去对重复指标的求和号)

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} (p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - H_{\mathrm{c}}) \mathrm{d}t \tag{7-6-7}$$

的变分，可得

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}} \delta p_i^{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i} \delta q_{(s)}^i + \mathrm{D}[p_i^{(s)} \delta q_{(s)}^i + (p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - H_{\mathrm{c}}) \Delta t] = \varepsilon_\sigma \mathrm{D}\Lambda^\sigma \tag{7-6-8}$$

式中 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta p_i^{(s)}$ 和 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta q_{(s)}^i$ 由(7-1-40)式给出，而

$$\delta p_i^{(s)} = \Delta p_i^{(s)} - \dot{p}_i^{(s)} \Delta t, \quad \delta q_{(s)}^i = \Delta q_{(s)}^i - \dot{q}_{(s)}^i \Delta t \tag{7-6-9}$$

假设约束条件(7-6-4)式在(7-6-6)式所确定的等时变分下不变，即初级约束加在正则变量等时变分上的条件为

$$\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i} \delta q_{(s)}^i + \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}} \delta p_i^{(s)} = 0 \tag{7-6-10}$$

利用 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)$ 乘(7-6-10)式，并对指标 a 求和，将所得结果与(7-6-8)式结合，根据约束 Hamilton 系统的正则方程

(7-6-5)式，得

$$p_i^{(s)}\xi_{(s)}^{i\sigma} - H_c\tau^\sigma - \Lambda^\sigma = \text{const}$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{7-6-11}$$

这样就得到了高阶微商奇异 Lagrange 量系统正则形式的广义 Noether 第一定理，即如果在(7-6-6)式变换下，系统的正则 Lagrange 量 L^p 改变一个时间的全微分项，且约束条件(7-6-4)式在(7-6-6)式所确定的等时变分下不变，那么该广义约束 Hamilton 系统在相空间中存在守恒律(7-6-11)式.

如何寻求变换(7-6-6)式，在其变换下使正则作用量和约束方程分别适合(7-6-8)和(7-6-10)式呢？设 $N=2$ 且(7-6-6)式中的生成函数 τ^σ、$\xi_{(s)}^{i\sigma}$、$\eta_i^{\sigma(s)}$ 不依赖于 $\dot{q}_{(1)}^i$ 和 $\dot{p}_i^{(s)}(s=0,1)$，并将(7-6-6)式代入正则作用量不变性的基本方程(7-6-8)式，比较该方程两端 $\dot{q}_{(1)}^i$ 和 $\dot{p}_i^{(s)}$ 相应的各次系数，可得到关于未知量 τ^σ、$\xi_{(s)}^{i\sigma}$、$\eta_i^{\sigma(s)}$ 的偏微分方程组[33]，即

$$p_i^{(s)}\frac{\partial \xi_{(s)}^{i\sigma}}{\partial p_j^{(0)}} - H_c\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial p_j^{(0)}} = \frac{\partial \Lambda^\sigma}{\partial p_j^{(0)}} \tag{7-6-12a}$$

$$p_i^{(s)}\frac{\partial \xi_{(s)}^{i\sigma}}{\partial p_j^{(1)}} - H_c\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial p_j^{(1)}} = \frac{\partial \Lambda^\sigma}{\partial p_j^{(1)}} \tag{7-6-12b}$$

$$\eta_j^{\sigma(1)} + p_i^{(s)}\frac{\partial \xi_{(s)}^{i\sigma}}{\partial q_{(1)}^j} - H_c\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial q_{(1)}^j} = \frac{\partial \Lambda^\sigma}{\partial q_{(1)}^j} \tag{7-6-12c}$$

$$\begin{aligned}&\eta_i^{\sigma(0)}q_{(1)}^i - \eta_i^{\sigma(s)}\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}} + p_i^{(s)}\left(\frac{\partial \xi_{(s)}^{i\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{(s)}^{i\sigma}}{\partial q_{(0)}^j}q_{(1)}^j\right) - \\ &\qquad \xi_{(0)}^{i\sigma}\left(\frac{\partial H_c}{\partial q_{(0)}^i} + \frac{\partial H_c}{\partial q_{(1)}^i}\right) - H_c\left(\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial t} + \frac{\partial \tau^\sigma}{\partial q_{(0)}^i}q_{(1)}^i\right) - \\ &\qquad \frac{\partial H_c}{\partial t}\tau^\sigma = \frac{\partial \Lambda^\sigma}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda^\sigma}{\partial q_{(0)}^i}q_{(1)}^i\end{aligned} \tag{7-6-12d}$$

将(7-6-6)式决定的等时变分 $\delta q_{(s)}^i$ 和 $\delta p_i^{(s)}$ 代入(7-6-10)式，得

$$\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}(\xi_{(s)}^{i\sigma} - \dot{q}_{(s)}^i\tau^\sigma) + \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}(\eta_i^{(s)\sigma} - \dot{p}_i^{(s)}\tau^\sigma) = 0 \tag{7-6-13}$$

偏微分方程组(7-6-12)、(7-6-13)式是关于未知函数 τ^{a}、$\xi_{(s)}^{i\sigma}$、$\eta_{i}^{(s)\sigma}$ $(i=1,2,\cdots,n;s=0,1;\sigma=1,2,\cdots,r)$的方程组，并称该方程组为高阶微商奇异 Lagrange 量系统正则形式的广义 Killing 方程组. 在 H_{c}、Λ^{σ}、Φ_{a}^{0} 给定后，如果广义 Killing 方程组有解 τ^{σ}、$\xi_{(s)}^{i\sigma}$、$\eta_{i}^{\sigma(s)}$，那么，该广义约束 Hamilton 系统存在守恒律(7-6-11)式.

现讨论系统在无限连续群下的变换性质. 其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned} t' &= t + \Delta t = t + \sum_{j=0}^{J} a_{j}^{\sigma} \mathrm{D}^{j} \varepsilon_{\sigma}(t) \\ q_{(s)}^{i\prime}(t') &= q_{(s)}^{i}(t) + \Delta q_{(s)}^{i}(t) = \\ &\qquad q_{(s)}^{i}(t) + \sum_{k=0}^{K} b_{(s)k}^{i\sigma} \mathrm{D}^{k} \varepsilon_{\sigma}(t) \\ p_{i}^{(s)\prime}(t') &= p_{i}^{(s)}(t) + \Delta p_{i}^{(s)}(t) = \\ &\qquad p_{i}^{(s)}(t) + \sum_{m=0}^{M} c_{im}^{(s)\sigma} \mathrm{D}^{m} \varepsilon_{\sigma}(t) \end{aligned}\right\} \tag{7-6-14}$$

式中：$\varepsilon_{\sigma}(t)(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意函数；系数 a、b、c 等均为 t、$q_{(s)}^{i}$、$p_{i}^{(s)}$ 的函数. 在(7-6-14)式的变换下，设正则 Lagrange 量 L^{p} 的变更

$$\Delta L^{\mathrm{p}} = \Delta(p_{i}^{(s)} q_{(s+1)}^{i} - H_{c}) = \mathrm{D}(\Lambda^{\sigma}\varepsilon_{\sigma}) + U^{\sigma}\varepsilon_{\sigma} \tag{7-6-15}$$

式中

$$U^{\sigma} = \sum_{n=0}^{N_0} u_{n}^{\sigma} \mathrm{D}^{n} \tag{7-6-16}$$

$$\Lambda^{\sigma} = \sum_{i=0}^{I} v_{i}^{\sigma} \mathrm{D}^{i} \tag{7-6-17}$$

其中 u、v 等均为 t、$q_{(s)}^{i}$、$p_{i}^{(s)}$ 的函数. 由(7-6-7)、(7-6-14)、(7-6-15)式得

$$\begin{aligned} &\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_{i}^{(s)}} \delta p_{i}^{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^{i}} \delta q_{(s)}^{i} + \mathrm{D}[p_{i}^{(s)} \delta q_{(s)}^{i} + \\ &\qquad (p_{i}^{(s)} q_{(s+1)}^{i} - H_{c}) \Delta t] = \mathrm{D}(\Lambda^{\sigma}\varepsilon_{\sigma}) + U^{\sigma}\varepsilon_{\sigma} \end{aligned} \tag{7-6-18}$$

利用恒等式

$$\sum_{n=0}^{N} f_n^\sigma \mathrm{D}^n \varepsilon_\sigma(t) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (\mathrm{D}^n f_n^\sigma) \varepsilon_\sigma(t) + \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathrm{D}[\mathrm{D}^k f_n^\sigma \mathrm{D}^{n-k-1} \varepsilon_\sigma(t)] \quad (7\text{-}6\text{-}19)$$

并将(7-6-9)、(7-6-14)、(7-6-19)式代入(7-6-18)式，得

$$\Bigg[\sum_{m=0}^{M} (-1)^m \mathrm{D}^m \left(c_{im}^{(s)\sigma} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}} \right) + \sum_{j=0}^{J} (-1)^{j+1} \mathrm{D}^j \left(a_j^\sigma \dot{p}_i^{(s)} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}} \right) + \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \mathrm{D}^k \left(b_{(s)k}^{i\sigma} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i} \right) + \sum_{j=0}^{J} (-1)^{j+1} \mathrm{D}^j \left(a_j^\sigma \dot{q}_{(s)}^i \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i} \right) + \sum_{n=0}^{N_0} (-1)^{n+1} \mathrm{D}^n u_n^\sigma \Bigg] \varepsilon_\sigma = \mathrm{D}\Big[\sum_{l=0}^{5} B_l + \Lambda^\sigma \varepsilon_\sigma - p_i^{(s)} \Big(\sum_{k=0}^{K} b_{(s)k}^{i\sigma} \mathrm{D}^k \varepsilon_\sigma - q_{(s+1)}^i \sum_{j=0}^{J} a_j^\sigma \mathrm{D}^j \varepsilon_\sigma(t) \Big) \Big] \quad (7\text{-}6\text{-}20)$$

其中

$$B_0 = \sum_{j=0}^{J} (p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - H_c) a_j^\sigma \mathrm{D}^j \varepsilon_\sigma(t) \quad (7\text{-}6\text{-}21\mathrm{a})$$

$$B_1 = \sum_{m=0}^{M} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \mathrm{D}^j \left(c_{im}^{(s)\sigma} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}} \right) \mathrm{D}^{m-j-1} \varepsilon_\sigma(t) \quad (7\text{-}6\text{-}21\mathrm{b})$$

$$B_2 = \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \mathrm{D}^k \left(a_j^\sigma \dot{p}_i^{(s)} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}} \right) \mathrm{D}^{j-k-1} \varepsilon_\sigma(t) \quad (7\text{-}6\text{-}21\mathrm{c})$$

$$B_3 = \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} \mathrm{D}^j \left(b_{(s)k}^{i\sigma} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i} \right) \mathrm{D}^{k-j-1} \varepsilon_\sigma(t) \quad (7\text{-}6\text{-}21\mathrm{d})$$

$$B_4 = \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \mathrm{D}^k \left(a_j^\sigma \dot{q}_{(s)}^i \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i} \right) \mathrm{D}^{j-k-1} \varepsilon_\sigma(t) \quad (7\text{-}6\text{-}21\mathrm{e})$$

$$B_5 = \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^k u_n^\sigma) \mathrm{D}^{n-k-1} \varepsilon_\sigma(t) \quad (7\text{-}6\text{-}21\mathrm{f})$$

将(7-6-20)式在$[t_1,t_2]$上积分. 由于$\varepsilon_\sigma(t)$任意性,可选它们及其所需的各阶微商在端点上为0,这样(7-6-20)式积分后右端为0,再利用$\varepsilon_\sigma(t)$的任意性,于是得

$$\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\mathrm{D}^m\left(c_{im}^{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}}\right)+\sum_{j=0}^{J}(-1)^{j+1}\mathrm{D}^j\left(a_j^\sigma\dot{p}_i^{(s)}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}}\right)+$$
$$\sum_{k=0}^{K}(-1)^k\mathrm{D}^k\left(b_{(s)k}^{i\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i}\right)+\sum_{j=0}^{J}(-1)^{j+1}\mathrm{D}^j\left(a_j^\sigma\dot{q}_{(s)}^i\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i}\right)=$$
$$\sum_{n=0}^{N_0}(-1)^n\mathrm{D}^n u_n^\sigma\quad(\sigma=1,2,\cdots,r)\tag{7-6-22}$$

这样就得到了相空间中广义的 Noether 第二定理:如果正则形式的 Lagrange 量 L^{p} 在无限连续群的无穷小变换(7-6-14)式的变换下,其变更由(7-6-15)式确定,那么该系统必存在 r 个含泛函微商的微分恒等式(7-6-22)式,并称(7-6-22)式为有限自由度高阶微商系统在相空间的广义 Noether 恒等式. (7-6-22)式成立与 $q_{(s)}^i$、$p_i^{(s)}$ 是否为运动方程的解无关. 对于在(7-6-14)式变换下,其 Lagrange 量 L^{p} 不变的系统,(7-6-22)式右端为0,此时将运动方程(7-6-5)式代入(7-6-22)式,得

$$\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\mathrm{D}^m\left(c_{im}^{(s)\sigma}\lambda^a\frac{\partial\Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\right)+\sum_{j=0}^{J}(-1)^{j+1}\mathrm{D}^j\left(a_j^\sigma\dot{p}_i^{(s)}\lambda^a\frac{\partial\Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\right)+$$
$$\sum_{k=0}^{K}(-1)^k\mathrm{D}^k\left(b_{(s)k}^{i\sigma}\lambda^a\frac{\partial\Phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}\right)+\sum_{j=0}^{J}(-1)^{j+1}\mathrm{D}^j\left(a_j^\sigma\dot{q}_{(s)}^i\lambda^a\frac{\partial\Phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}\right)\approx 0$$
$$(\sigma=1,2,\cdots,r)\tag{7-6-23}$$

(7-6-23)式给出了在无限连续群下不变性系统的正则变量和 Lagrange乘子应适合的附加条件.

我们知道,利用 Lagrange 体制中的 Noether 恒等式,可以证明:定域不变性系统必含 Dirac 约束. 同样,利用相空间的广义 Noether 第二定理,也可以证明:某些变更性高阶微商系统仍含

Dirac 约束时，该系统为广义约束 Hamilton 系统[33].

考虑一广义力学系统，在定域变换

$$\left.\begin{aligned}&t' = t\\&q^{i\prime}_{(s)}(t') = q^{i}_{(s)}(t) + (b^{i\sigma}_{0(s)} + b^{i\sigma}_{1(s)}\mathrm{D})\varepsilon_{\sigma}(t)\\&p^{(s)\prime}_{i}(t') = p^{(s)}_{i}(t) + (c^{\sigma(s)}_{i0} + c^{\sigma(s)}_{i1}\mathrm{D})\varepsilon_{\sigma}(t)\end{aligned}\right\}\tag{7-6-24}$$

下，设系统的正则 Lagrange 量的变更适合(7-6-15)式，式中的

$$U^{\sigma} = u^{\sigma}_{0}(t;q^{i}_{(s)},p^{(s)}_{i}) + u^{\sigma}_{1}(t;q^{i}_{(s)},p^{(s)}_{i})\tag{7-6-25}$$

在此情形下，正则广义 Noether 恒等式(7-6-22)式成为

$$\begin{aligned}&c^{\sigma(s)}_{0i}\left(\dot{q}^{i}_{(s)} - \frac{\partial H_{c}}{\partial p^{(s)}_{i}}\right) - b^{i\sigma}_{0(s)}\left(\dot{p}^{(s)}_{i} + \frac{\partial H_{c}}{\partial q^{i}_{(s)}}\right) -\\&\mathrm{D}\left[c^{\sigma(s)}_{i1}\left(\dot{q}^{i}_{(s)} - \frac{\partial H_{c}}{\partial p^{(s)}_{i}}\right)\right] + \mathrm{D}\left[b^{i\sigma}_{1(s)}\left(\dot{p}^{(s)}_{i} + \frac{\partial H_{c}}{\partial q^{i}_{(s)}}\right)\right] =\\&u^{\sigma}_{0} - \mathrm{D}u^{\sigma}_{1}\end{aligned}\tag{7-6-26}$$

注意到 Ostrogradsky 变换(7-1-14)式中关于 $p^{(0)}_{i}$ 的表达式，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^{i}} = \frac{\partial^{2} L}{\partial \ddot{q}^{i}\partial q^{j}}\dot{q}^{j} + \frac{\partial^{2} L}{\partial \ddot{q}^{i}\partial \dot{q}^{j}}\ddot{q}^{j} + \frac{\partial^{2} L}{\partial \ddot{q}^{i}\partial \ddot{q}^{j}}\dddot{q}^{j}\tag{7-6-27}$$

将(7-1-14)、(7-6-27)式代入恒等式(7-6-26)式中，可以看出 q^{i} 的最高微商出现在 $\mathrm{D}(b^{i\sigma}_{1(0)}\dot{p}^{(0)}_{i})$ 项之中，即出现在 $\mathrm{D}\left\{b^{i\sigma}_{1(0)}\mathrm{D}\left[\left(\frac{\partial^{2} L}{\partial \ddot{q}^{i}\partial \ddot{q}^{j}}\right)\dddot{q}^{j}\right]\right\}$ 项中，这就导致 q^{i} 的最高阶导数是五阶的. 由于 $q^{i}(t)$ 的任意性，各阶导数项之和应分别为 0，而与其他项无关. 由 q^{i} 的最高阶微商项之和为 0，就有

$$b^{i\sigma}_{1(0)}\frac{\partial^{2} L}{\partial q^{i}_{(2)}\partial q^{j}_{(2)}}q^{j}_{(5)} = 0\tag{7-6-28}$$

(7-6-28) 式对任意的 $q^{j}(t)$ 的五阶微商均满足，从而

$$b^{i\sigma}_{1(0)} \frac{\partial^2 L}{\partial q^i_{(2)} \partial q^j_{(2)}} = 0 \tag{7-6-29}$$

因为 $b^{i\sigma}_{1(0)}$不全为 0，由(7-6-29)式可知，此时广义 Hess 矩阵退化，从而该系统为广义约束 Hamilton 系统.

§7-7 广义 Poincaré-Cartan 积分不变量

高阶微商显含时间奇异 Lagrange 量系统的广义正则方程按(7-3-11)式可写为

$$\dot{q}^i_{(m)} \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(m)}} + v_{a_1} \frac{\partial \Lambda_{a_1}}{\partial p_i^{(m)}} - \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial p_i^{(m)}} c^{-1}_{b'b} \left[\frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \{\theta_b, H_c\} \right] \tag{7-7-1a}$$

$$\dot{p}_i^{(m)} \approx - \frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(m)}} - v_{a_1} \frac{\partial \Lambda_{a_1}}{\partial q^i_{(m)}} + \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial q^i_{(m)}} c^{-1}_{b'b} \left[\frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \{\theta_b, H_c\} \right] \tag{7-7-1b}$$

式中：$\Lambda_{a_1} \approx 0$ 为初级第一类约束；$\theta_b \approx 0$ 为全部第二类约束；约束乘子 v_{a_1}是不定的.

传统的一阶微商奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量的研究，是从位形空间出发来讨论的. 第二章在相空间中已建立了一阶微商显含时间奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量，这里将其推广到高阶微商奇异 Lagrange 量系统，从相空间的正则形式出发，以便于研究广义 Poincaré-Cartan 积分不变量与广义正则方程间的等价性.

高阶微商系统的正则作用量

$$I^p = \int_{t_1}^{t_2} [p_i^{(m-1)} q^i_{(m)} - H_c(t; q^i_{(m-1)}, p_i^{(m-1)})] dt \tag{7-7-2}$$

现讨论系统在增广相空间中的变换性质. 其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned}&t \to t' = t + \Delta t = t + t(\theta)\\&q^i_{(m-1)}(t) \to q'^i_{(m-1)}(t',\theta) = q^i_{(m-1)}(t) + \Delta q^i_{(m-1)}(t,\theta)\\&p_i^{(m-1)}(t) \to p_i^{(m-1)\prime}(t',\theta) = p_i^{(m-1)} + \Delta p_i^{(m-1)}(t,\theta)\end{aligned}\right\}$$

(7-7-3)

其中 θ 为参数，它满足

$$\left.\begin{aligned}q'^i_{(m-1)}(t,0) &= q^i_{(m-1)}(t)\\p_i^{(m-1)\prime}(t,0) &= p_i^{(m-1)}(t)\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}7\text{-}4)$$

条件.在(7-7-3)式变换之下，正则作用量(7-7-2)式的变分

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i_{(m-1)}}\delta q^i_{(m-1)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(m-1)}}\delta p_i^{(m-1)} + \right.$$

$$\left.\mathrm{D}\left[p_i^{(m-1)}\delta q^i_{(m-1)} + (p_i^{(m-1)}q^i_{(m)} - H_{\mathrm{c}})\Delta t\right]\right\}\mathrm{d}t \qquad (7\text{-}7\text{-}5)$$

式中 $\delta q^i_{(m-1)}$、$\delta p_i^{(m-1)}$ 为等时变分.其中

$$\left.\begin{aligned}\delta q^i_{(m-1)} &= \Delta q^i_{(m-1)} - \dot{q}^i_{(m-1)}\Delta t\\\delta p_i^{(m-1)} &= \Delta p_i^{(m-1)} - \dot{p}_i^{(m-1)}\Delta t\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}7\text{-}6)$$

而

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i_{(m-1)}} &= -\dot{p}_i^{(m-1)} - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i_{(m-1)}}\\\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(m-1)}} &= \dot{q}^i_{(m-1)} - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i^{(m-1)}}\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}7\text{-}7)$$

由于约束条件的限制，变分 $\Delta q^i_{(m-1)}$ 和 $\Delta p_i^{(m-1)}$ 不能是任意的.因为约束一般显含时间 t，对某一给定的时刻，正则变量的改变应保持在约束超曲面上，即约束条件在正则变量的等时变分下应是不变的.约束加在正则变量的等时变分条件适合

$$\frac{\partial \Lambda_{a_1}}{\partial q^i_{(m-1)}}\delta q^i_{(m-1)} + \frac{\partial \Lambda_{a_1}}{\partial p_i^{(m-1)}}\delta p_i^{(m-1)} \approx 0 \qquad (7\text{-}7\text{-}8)$$

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial q^i_{(m-1)}}\delta q^i_{(m-1)} + \frac{\partial \theta_b}{\partial p_i^{(m-1)}}\delta p_i^{(m-1)} \approx 0 \qquad (7\text{-}7\text{-}9)$$

由 Lagrange 乘子 $v_{a_1}(t)$ 和 $v_b(t)$ 分别乘(7-7-8)、(7-7-9)式并求和，

然后在$[t_1,t_2]$上求积分，将所得结果与(7-7-5)式合并，再利用第二类约束的自洽性(相容性)条件确定出乘子$v_b(t)$，得

$$I^{p\prime}(\theta)\Delta\theta\approx\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\delta I^{p}}{\delta q^i_{(m-1)}}+v_{a_1}\frac{\partial\Lambda_{a_1}}{\partial q^i_{(m-1)}}-\frac{\partial\theta_b}{\partial q^i_{(m-1)}}\cdot c^{-1}_{bb'}\left(\frac{\partial\theta_{b'}}{\partial t}+\{\theta_{b'},H_c\}\right)\right]\delta q^i_{(m-1)}+\left[\frac{\delta I^{p}}{\delta p_i^{(m-1)}}+v_{a_1}\frac{\partial\Lambda_{a_1}}{\partial p_i^{(m-1)}}-\frac{\partial\theta_b}{\partial p_i^{(m-1)}}\cdot c^{-1}_{bb'}\left(\frac{\partial\theta_{b'}}{\partial t}+\{\theta_{b'},H_c\}\right)\right]\cdot\delta p_i^{(m-1)}+\mathrm{D}[p_i^{(m-1)}\Delta q^i_{(m-1)}-H_c\Delta t]\right\}\mathrm{d}t \tag{7-7-10}$$

沿着约束运动的轨线，利用约束 Hamilton 系统的广义正则方程(7-7-1)式，由(7-7-10)式有

$$I^{p\prime}(\theta)\Delta\theta=[p_i^{(m-1)}\Delta q^i_{(m-1)}-H_c\Delta t]|_{t=t_2}-[p_i^{(m-1)}\Delta q^i_{(m-1)}-H_c\Delta t]|_{t=t_1} \tag{7-7-11}$$

在t、$q^i_{(m-1)}$和$p_i^{(m-1)}$所张成的增广相空间由约束确定的子空间中，取一条闭曲线C_1，该曲线以参数θ来描述. 设C_1的方程为

$$t=t_1(\theta),\ q^i_{(m-1)}=q^i_{1(m-1)}(\theta),\ p_i^{(m-1)}=p_i^{1(m-1)}(\theta) \tag{7-7-12}$$

其中$\theta=0$和$\theta=l$代表C_1上同一点. 过C_1上的任一点存在一条系统运动的“轨线”，过C_1上的每一点的“轨线”构成“轨线管”. 在此“轨线管”上取另一条闭曲线C_2，使它包围此“轨线管”并与“轨线管”的母线仅相交一次. 设C_2的方程为

$$t=t_2(\theta),q^i_{(m-1)}=q^i_{2(m-1)}(\theta),p_i^{(m-1)}=p_i^{2(m-1)}(\theta) \tag{7-7-13}$$

将(7-7-11)式分别沿曲线C_1和C_2积分，得

$$J=\oint_{C_k}[p_i^{(m-1)}\Delta q^i_{(m-1)}-H_c\Delta t]=\text{不变量}\quad(k=1,2) \tag{7-7-14}$$

(7-7-14)式称为高阶微商显含时间奇异 Lagrange 量系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 它表明，如果系统的约束 Λ_{a_1} 和 θ_b 在变换(7-7-3)式所确定的等时变分下不变，在增广相空间中取一条适合约束条件的闭曲线 C，那么，沿着约束系统运动的"轨线"在 C 上积分，系统存在积分不变量(7-7-14)式.

通常在正规 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量中，正则变量的变分是任意的，不受任何限制；而奇异 Lagrange 量系统则不同，正则变量的变分需满足(7-7-8)、(7-7-9)式，才能保证广义 Poincaré-Cartan 积分不变量(7-7-14)式存在. 对一阶微商奇异 Lagrange 量系统，文献[34,35]中的作者在导出相应的 Poincaré-Cartan 积分不变量时，没有正确区分变量的等时变分和全变分，他们所得的结果在约束不显含时间或变换(7-7-3)式中的 $\Delta t=0$ 时，才是有效的.

§7-8 广义 Poincaré-Cartan 积分不变量和广义正则方程、正则变换

上面从正则作用量出发，利用广义正则方程，导出了广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 现在反过来研究其逆命题，即从广义 Poincaré-Cartan 积分不变量出发，可以得到系统的广义正则方程. 考虑一个广义力学系统，满足以下条件：

(1)系统在相空间中存在约束. 设第一类约束为 $\Lambda_a(t;q^i_{(m)},p_i^{(m)})\approx 0$，第二类约束为 $\theta_b(t;q^i_{(m)},p_i^{(m)})\approx 0$. 所有的约束均满足自洽性要求.

(2)系统在相空间中的动力学"轨线"由一组微分方程

$$\dot{q}^i_{(m)}\approx f^i_m(t;q^i_{(k)},p_i^{(k)},u_a) \tag{7-8-1a}$$

$$\dot{p}_i^{(m)}\approx g_i^m(t;q^i_{(k)},p_i^{(k)},u_a) \tag{7-8-1b}$$

确定，其中 $u_a(t)$ 为任意函数.

(3)在增广相空间中存在函数 H_c,它满足

$$\frac{\partial \Lambda_a}{\partial t} + \{\Lambda_a, H_c\} \approx 0 \tag{7-8-2}$$

(4)在方程组(7-8-1)式的解所确定的“轨线管”上,沿包围此“轨线管”的闭曲线 C 积分存在广义 Poincaré-Cartan 不变量(7-7-14)式.

由此可以证明:该广义力学系统在相空间的运动方程为广义正则方程,即

$$\dot{q}^i_{(m)} \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(m)}} + v_a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i^{(m)}} - \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial p_i^{(m)}} \cdot c^{-1}_{b'b}\left[\frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \{\theta_b, H_c\}\right] \tag{7-8-3a}$$

$$\dot{p}_i^{(m)} \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(m)}} - v_a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i_{(m)}} + \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial q^i_{(m)}} \cdot c^{-1}_{b'b}\left[\frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \{\theta_b, H_c\}\right] \tag{7-8-3b}$$

为了证明上述结果,引入一个辅助参量 μ,像文献[36]中那样,在方程组(7-8-1)式中添加一个方程,成为

$$\frac{\mathrm{d}q^1_{(m)}}{f^1_m} = \cdots = \frac{\mathrm{d}q^n_{(m)}}{f^n_m} = \frac{\mathrm{d}p_1^{(m)}}{g^m_1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}p_n^{(m)}}{g^m_n} = \mathrm{d}t = \pi \mathrm{d}\mu \tag{7-8-4}$$

式中 π 为增广相空间中的任一函数.由(7-8-4)式得

$$\left.\begin{aligned} t &= t(t_0; q^i_{(k)0}, p_{i0}^{(k)}, \mu) \\ q^i_{(m)} &= q^i_{(m)}(t_0; q^i_{(k)0}, p_{i0}^{(k)}, \mu) \\ p_i^{(m)} &= p_i^{(m)}(t_0; q^i_{(k)0}, p_{i0}^{(k)}, \mu) \end{aligned}\right\} \tag{7-8-5}$$

式中 t_0、$q^i_{(k)0}$、$p_{i0}^{(k)}$ 为初值,它们对应于 $\mu=0$,这些初值位于约束所决定的超曲面 Σ 中.取初值点位于 Σ 中的闭曲线上,该曲线用参

数 θ 表征. 因此,动力学"轨线管"方程可写为

$$q^i_{(m)} = q^i_{(m)}(\mu,\theta),\ \ p^{(m)}_i = p^{(m)}_i(\mu,\theta),\ \ t = t(\mu,\theta)$$
$$(0 \leqslant \theta \leqslant l) \tag{7-8-6}$$

对于一个给定的 θ 值,它相应于一条确定的"轨线管"母线,而参数 μ 的值则决定了这条母线上的一点. 令 μ 为常数,(7-8-6)式确定了"轨线管"上一条闭曲线 C. 设用字母 d 表示对参数 μ 的微分,用符号 Δ 表示对参数 θ 的微分. 沿闭曲线 C,根据广义 Poincaré-Cartan 积分不变量,有

$$\mathrm{d}J = \oint_C [\mathrm{d}p^{(m)}_i \Delta q^i_{(m)} + p^{(m)}_i \mathrm{d}\Delta q^i_{(m)} - \mathrm{d}H_c\Delta t - H_c \mathrm{d}\Delta t] = 0 \tag{7-8-7}$$

将(7-8-7)式分部积分后,除以 $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}t/\pi$,并利用(7-8-1)式,由于 π 的任意性,从而有

$$\left(g^m_i + \frac{\partial \dot{H}_c}{\partial q^i_{(m)}}\right)\Delta q^i_{(m)} + \left(-f^i_m + \frac{\partial H_c}{\partial p^{(m)}_i}\right)\Delta p^{(m)}_i +$$
$$\left(-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H_c}{\partial t}\right)\Delta t = 0 \tag{7-8-8}$$

因为系统的运动在相空间中受到约束 $\Lambda_a \approx 0$ 和 $\theta_b \approx 0$ 的限制,所以(7-8-8)式中正则变量的变分是不独立的. 约束 Λ_a 和 θ_b 加上等时变分上的条件成为(7-7-8)、(7-7-9)式那样的关系,引入 Lagrange乘子 v_a 和 v_b,利用 Lagrange 乘子法则,由(7-7-8)、(7-7-9)、(7-8-8)式可得

$$\dot{q}^i_{(m)} \approx f^i_m \approx \frac{\partial H_c}{\partial p^{(m)}_i} + v_a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p^{(m)}_i} + v_b \frac{\partial \theta_b}{\partial p^{(m)}_i} \tag{7-8-9a}$$

$$\dot{p}^{(m)}_i \approx g^m_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(m)}} - v_a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q^i_{(m)}} - v_b \frac{\partial \theta_b}{\partial q^i_{(m)}} \tag{7-8-9b}$$

从第二类约束 θ_b 的自洽性条件确定出乘子 v_b,并将它代入(7-8-9)式就得系统的正则方程(7-8-3)式,式中的 Λ_a 为所有第一类约束函数.

由此可见,广义约束 Hamilton 的广义正则方程和该系统的广

义 Poincaré-Cartan 积分不变量是等价的.

下面讨论广义 Poincaré-Cartan 积分不变量与正则变换的关系. 一个正则变量的变换

$$\left.\begin{aligned} Q^i_{(m)} &= Q^i_{(m)}(t;q^i_{(k)},p^{(k)}_i) \\ P^{(m)}_i &= P^{(m)}_i(t;q^i_{(k)},p^{(k)}_i) \end{aligned}\right\} \tag{7-8-10}$$

如果它使得广义约束 Hamilton 系统的广义正则方程(7-8-3)式的形式不变,则称变换(7-8-10)式为该系统的广义正则变换,即是说如果存在函数 K_c,使该系统的广义正则方程变为

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}^i_{(m)} &= \frac{\partial K}{\partial P^{(m)}_i} = \{Q^i_{(m)},K\} \\ \dot{P}^{(m)}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q^i_{(m)}} = \{P^{(m)}_i,K\} \end{aligned}\right\} \tag{7-8-11}$$

式中

$$K = K_c + v_a\overline{\Lambda}_a - \overline{\theta}_{b'}c^{-1}_{b'b}\left(\{\overline{\theta}_b,K_c\} + \frac{\partial\overline{\theta}_b}{\partial t}\right) \tag{7-8-12}$$

这里,$\overline{\Lambda}_a$ 和 $\overline{\theta}_b$ 是由 Λ_a 和 θ_b 经广义正则变换(7-7-10)式而得的[35].

如果对一个广义约束 Hamilton 系统,在(7-8-10)式变换之下,存在两个函数 K_c 和 F,使得

$$p^{(m)}_i\Delta q^i_{(m)} - H_c\Delta t = P^{(m)}_i\Delta Q^i_{(m)} - K_c\Delta t - \Delta F \tag{7-8-13}$$

那么,(7-8-10)式为广义约束 Hamilton 系统的广义正则变换.

实际上,在增广相空间中任取一条适合约束条件的闭曲线 C,由(7-8-13)式有

$$\oint_C (p^{(m)}_i\Delta q^i_{(m)} - H_c\Delta t) = \oint_{\overline{C}} (P^{(m)}_i\Delta Q^i_{(m)} - K_c\Delta t) \tag{7-8-14}$$

由于 $q^i_{(m)}(t)$ 和 $p^{(m)}_i(t)$ 适合正则方程,故(7-7-14)式左端为广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 相应的,(7-7-14)式右端对新变量而言也是广义 Poincaré-Cartan 积分不变量,即变换后的"轨线"必适合广义约束 Hamilton 系统的广义正则方程. 所以,(7-7-10)式为该系统的广义正则变换.

§7-9 高阶微商系统 Dirac 猜想的反例

约束系统的 Dirac 理论在现代量子场论中占重要地位，利用该理论，规范场和引力场等量子化过程中的主要问题已得到解决. 然而，理论中也还有些基本问题，至今仍在文献中广泛讨论，其中之一就是 Dirac 猜想. 在奇异 Lagrange 量系统的正则形式理论中，Dirac 曾猜想：所有第一类约束均是规范变换的生成元，它们生成物理态之间等价的规范变换[37]. 长期以来，关于 Dirac 猜想是否有效，一直存在着争议[38~42]，对于仅含第一类约束的系统，如果 Dirac 猜想成立（包括高阶微商系统），系统的正则方程应该由扩展 Hamilton 量 H_E 导出[39,40]，

$$H_E = H_T + \lambda_A \chi_A = H_c + \lambda_a \Phi_a^0 + \lambda_A \chi_A \qquad (7\text{-}9\text{-}1)$$

式中：Φ_a^0 为第一类初级约束；χ_A 为第一类次级约束.

高阶微商奇异 Lagrange 量系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量和正则广义 Noether 定理是研究 Dirac 猜想是否有效的重要工具. 在上面推导广义 Poincaré-Cartan 积分不变量(7-7-14)式时，利用了由总 Hamilton 量 H_T 所决定的正则方程，其中仅计入了初级约束. 如果 Dirac 猜想成立，则系统时间演化由扩展 Hamilton 量 H_E 决定，其中计入了所有第一类约束. 如果除初级第一类约束满足(7-7-8)式条件之外，次级第一类约束也满足(7-7-8)式条件，那么由扩展 Hamilton 量 H_E 所决定的正则方程出发，同样也可导出广义 Poincaré-Cartan 积分不变量(7-7-14)式. 由此，得出结论：由 H_E 导出的方程(7-8-3)式为广义正则方程的充分必要条件是系统存在广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 利用广义 Poincaré-Cartan 积分不变量导出的广义正则方程(7-8-3)式中，包含了所有第一类约束，其中已无法区分初级第一类约束和次级第一类约束. 这表明，对广义约束 Hamilton 系统，存在广义

Poincaré-Cartan 积分不变量与 Dirac 猜想有效二者是等价的. 在正规 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量中，其正则变量的变分是任意的，而奇异 Lagrange 量系统存在广义 Poincaré-Cartan 积分不变量，其正则变量的变分要受到约束条件的限制(约束条件在正则变量的等时变分下不变). 因此，对于高阶微商奇异 Lagrange 量系统，其广义 Poincaré-Cartan 积分不变量是否存在并且所有由 H_E 确定的广义正则方程是否能由广义 Poincaré-Cartan 积分不变量导出，可以作为 Dirac 猜想是否有效的一个判别准则. 如果在给定的情形中，广义 Poincaré-Cartan 积分不变量不存在，或者该不变量虽然存在，但由 H_E 确定的所有广义正则方程不能完全由该广义 Poincaré-Cartan 积分不变量导出，那么，在这种情形中 Dirac 猜想失效.

考虑 Lagrange 量

$$L = \sum_{s=1}^{N}[x_{(s)}z_{(s)} - y_{(s-1)}z_{(s)}] + xz \tag{7-9-2}$$

式中 $x_{(s)}=\frac{d^s}{dt^s}x(t)$，$x_{(0)}=x$ 等. 当 $N=1$ 时，恰好是(2-7-2)式，此时 Dirac 猜想在该模型中失效. 不难证明，当 $N\geqslant 2$ 的高阶微商情形，由 Lagrange 量(7-9-2)式描述的系统，Dirac 猜想也不成立.

讨论当 $N=2$ 时：

与 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 和 x、y、z 相应的正则共轭动量，由(7-1-14)式得

$$p_x^{(1)} = \ddot{z},\ p_y^{(1)} = 0,\ p_z^{(1)} = \ddot{x} - \dot{y} \tag{7-9-3a}$$

$$p_x^{(0)} = \dot{z} - \dot{p}_x^{(1)},\ p_y^{(0)} = -\ddot{z},\ p_z^{(0)} = \dot{x} - y - \dot{p}_z^{(1)} \tag{7-9-3b}$$

系统的正则 Hamilton 量

$$H_c = \sum_{s=0}^{1}[p_x^{(s)}x_{(s+1)} + p_y^{(s)}y_{(s+1)} + p_z^{(s)}z_{(s+1)}] - L =$$

$$p_x^{(1)}p_z^{(1)} + p_x^{(1)}\dot{y} + p_x^{(0)}\dot{x} + p_y^{(0)}\dot{y} + p_z^{(0)}\dot{z} -$$

$$\dot{x}\dot{z}+y\dot{z}-xz \tag{7-9-4}$$

初级约束

$$\Phi^0 = p_y^{(1)} \approx 0 \tag{7-9-5}$$

总 Hamilton 量 $H_T = H_c + \lambda_0\Phi^0$，其中 $\lambda_0(t)$ 为 Lagrange 乘子. 由约束的自洽性条件，得次级约束. 其次级约束为

$$\Phi^1 = \{\Phi^0, H_T] = -p_x^{(1)} - p_y^{(0)} \approx 0 \tag{7-9-6}$$

$$\Phi^2 = \{\Phi^1, H_T] = p_x^{(0)} \approx 0 \tag{7-9-7}$$

$$\Phi^3 = \{\Phi^2, H_T] = z \approx 0 \tag{7-9-8}$$

全部约束$\{\Phi^k\}(k=0,1,2,3)$均是第一类约束.

相空间中 Lagrange 量

$$L^P = \sum_{s=0}^{1} p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - H_c =$$

$$p_x^{(1)} p_z^{(1)} + \dot{x}\dot{z} + xz - y\dot{z} \tag{7-9-9}$$

讨论当 $N=3$ 时：

与 $x_{(2)}, y_{(2)}, z_{(2)}; x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)}$和 x, y, z 相应的正则共轭动量分别为

$$\left.\begin{aligned} p_x^{(2)} &= z_{(3)} \\ p_y^{(2)} &= 0 \\ p_z^{(2)} &= x_{(3)} - y_{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{7-9-10}$$

$$\left.\begin{aligned} p_x^{(1)} &= z_{(2)} - \dot{p}_x^{(2)} \\ p_y^{(1)} &= -z_{(3)} - \dot{p}_y^{(2)} \\ p_z^{(1)} &= x_{(2)} - y_{(1)} - \dot{p}_z \end{aligned}\right\} \tag{7-9-11}$$

$$\left.\begin{aligned} p_x^{(0)} &= z_{(1)} - \dot{p}_x^{(1)} \\ p_y^{(0)} &= -z_{(2)} - \dot{p}_y^{(1)} \\ p_z^{(0)} &= x_{(1)} - y - \dot{p}_z^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{7-9-12}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c = \sum_{s=0}^{2}[p_x^{(s)}x_{(s+1)} + p_y^{(s)}y_{(s+1)} + p_z^{(s)}z_{(s+1)}] - L =$$

$$(p_z^{(2)} + y_{(2)})p_x^{(2)} + p_x^{(1)}x_{(2)} + p_y^{(1)}y_{(2)} + p_z^{(1)}z_{(2)} +$$

$$p_x^{(0)}x_{(1)} + p_y^{(0)}y_{(1)} + p_z^{(0)}z_{(1)} - x_{(2)}z_{(2)} +$$

$$y_{(1)}z_{(2)} - x_{(1)}z_{(1)} + yz_{(1)} - xz \tag{7-9-13}$$

初级约束

$$\Phi^0 = p_y^{(2)} \approx 0 \tag{7-9-14}$$

总 Hamilton 量 $H_T = H_c + \bar{\lambda}_0\Phi^0$. 由约束的自洽性条件,得次级约束. 其次级约束为

$$\Phi^1 = \{\Phi^0, H_T\} = -p_x^{(2)} - p_y^{(1)} \approx 0 \tag{7-9-15}$$

$$\Phi^2 = \{\Phi^1, H_T\} = p_x^{(1)} + p_y^{(0)} \approx 0 \tag{7-9-16}$$

$$\Phi^3 = \{\Phi^2, H_T\} = -p_x^{(0)} \approx 0 \tag{7-9-17}$$

$$\Phi^4 = \{\Phi^3, H_T\} = -z \approx 0 \tag{7-9-18}$$

$$\Phi^5 = \{\Phi^4, H_T\} = -z_{(1)} \approx 0 \tag{7-9-19}$$

$$\Phi^6 = \{\Phi^5, H_T\} = -z_{(2)} \approx 0 \tag{7-9-20}$$

$$\Phi^7 = \{\Phi^6, H_T\} = -p_z^{(2)} \approx 0 \tag{7-9-21}$$

$$\Phi^8 = \{\Phi^7, H_T\} = p_x^{(1)} - z_{(2)} \approx 0 \tag{7-9-22}$$

再无其他约束了,并且所有约束 $\{\Phi^k\}(k = 0,1,\cdots,8)$ 均为第一类约束.

相空间中 Lagrange 量

$$L^p = \sum_{s=0}^{2} p_i^{(s)} q^i_{(s+1)} - H_c = p_x^{(2)} p_z^{(2)} +$$

$$\sum_{s=1}^{2}[x_{(s)}z_{(s)} - y_{(s-1)}z_{(s)}] + xz \tag{7-9-23}$$

如果系统的运动方程是由扩展 Hamilton 量 H_E 决定的,那么所有次级第一类约束的线性组合均应计入 Hamilton 量中(见(7-9-1)式). 这时只要所有(初级和次级)第一类约束在正则变量变换

所决定的等时变分下不变，同样可导出广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 利用此不变量可写出系统的广义正则方程，此正则方程是由扩展 Hamilton 量决定的，所有第一类约束均出现在 Hamilton 量中了，这种情况下已无法区别初级第一类约束和次级第一类约束. 即是说，系统存在广义 Poincaré-Cartan 积分不变量，表明对该系统 Dirac 猜想成立[40,43]. 与正规 Lagrange 量系统不同的是，对奇异 Lagrange 量系统，约束还应满足(7-7-8)式(当系统的运动方程由 H_E 决定时，式中的 Λ_{a_1} 应为所有第一类约束)，才能导出广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 对于上述模型($N=2$ 或 $N=3$)，所有约束须在正则变量的等时变分 $\delta q^i_{(s)}$ 和 $\delta p_i^{(s)}$ 下不变(例如 $\delta z\approx 0$ 等). 由于存在广义 Poincaré-Cartan 积分不变量要求对正则变量的这种限制，借助于广义 Poincaré-Cartan 积分不变量就不能导出由 H_E 决定的全部正则方程，这就违反了广义 Poincaré-Cartan 积分不变量与由 H_E 决定的正则方程间的等价性，从而 Dirac 猜想在上述例子中失效.

这个问题也可以用正则广义 Noether 定理来讨论. 显然，Lagrange量(7-9-2)式在下列变换下不变：

$$x'_{(s)}=\rho^{-1}x_{(s)},\quad y'_{(s)}=\rho^{-1}y_{(s)},\quad z'_{(s)}=\rho z_{(s)}\tag{7-9-24}$$

式中 ρ 为数值参数. 根据位形空间变量表述的 Noether 第一定理(7-1-25)式，可求出相应的守恒量.

如果系统的正则方程是由总 Hamilton 量决定的，那么不难检验，相空间 Lagrange 量(7-9-9)式或(7-9-23)式在下列变换下不变. 其变换分别为

(1)当 $N=2$ 时：

$$\left.\begin{aligned}&x'_{(s)}=\rho^{-1}x_{(s)},\ y'_{(s)}=\rho^{-1}y_{(s)},\ z'_{(s)}=\rho z_{(s)}\\&\qquad\qquad (s=0,1)\\&p_x^{(1)\prime}=\rho p_x^{(1)},\quad p_z^{(1)\prime}=\rho^{-1}p_z^{(1)}\end{aligned}\right\}\tag{7-9-25}$$

(2)当 $N=3$ 时：

$$\left.\begin{array}{c}x'_{(s)}=\rho^{-1}x_{(s)},\quad y'_{(s)}=\rho^{-1}y_{(s)},\quad z'_{(s)}=\rho z_{(s)}\\(s=0,1,2)\\p_x^{(2)\prime}=\rho p_x^{(2)},\quad p_z^{(2)\prime}=\rho^{-1}p_z^{(2)}\end{array}\right\}\qquad(7\text{-}9\text{-}26)$$

初级约束 $\Phi^0\approx0(N=2$ 或 $N=3)$分别在(7-9-25)式或(7-9-26)式变换下不变. 由正则形式广义 Noether 第一定理(见§7-6),得系统的守恒量

$$p_x^{(s)}x_{(s)}+p_y^{(s)}y_{(s)}-p_z^{(s)}z_{(s)}=\text{const}\qquad(7\text{-}9\text{-}27)$$

式中:当 $N=2$ 时,$s=0,1$;当 $N=3$ 时,$s=0,1,2$. 守恒量(7-9-27)式也可以用位形空间变量表述的 Noether 第一定理导出(见§7-1).

如果系统的广义正则方程是由扩展 Hamilton 量 H_E 决定的,那么在此 Hamilton 量中,必须计入所有次级约束. 按正则形式广义 Noether 第一定理成立的条件,所有次级约束必须在(7-9-25)式或(7-9-26)式变换下不变,而次级约束均不能满足这些要求,这样就不能从扩展 Hamilton 量 H_E 出发导出守恒量(7-9-27)式. 这表明,Lagrange 方程和由 H_E 决定的广义正则方程不等价. 因此,Dirae 猜想在这个模型中失效.

在(7-9-2)式中,对 $N\geqslant4$ 的情形,经过类似的计算和讨论,可得到任意高阶微商奇异 Lagrange 量系统,Dirac 猜想不成立的结论.

§7-10 高阶微商场论中奇异 Lagrange 量系统的正则对称性

关于动力学系统的高阶微商理论,已经研究很长时间了,它与相对论性粒子动力学、引力理论、规范场理论、KDV 方程、超对称、弦模型以及其他问题密切相关. 近来,高阶微商理论日益受到人们的关注[40],这里研究高阶微商场论中奇异 Lagrange 量系统在相

空间中的经典对称性质.

对称性与守恒律的联系通常由 Noether 定理给出. 经典 Noether 定理及其推广[44,45]是在位形空间中用 Lagrange 变量表达的. 物理上许多重要的系统都是用奇异 Lagrange 量来描述,例如,定域变换下不变的系统(包括所有规范理论)均是用奇异 Lagrange量来描述的. 正则变量在相空间中存在固有约束时,即为约束 Hamilton 系统. 研究该系统约束的性质及其正则结构,对于动力学系统的量子化是十分重要的. 文献[40]中讨论了有限自由度的高阶微商奇异 Lagrange 量系统在相空间中的对称性质及其应用. 这里研究高阶微商场论中的奇异 Lagrange 量系统的正则对称性质[46].

1. 正则形式的广义 Noether 第一定理

设物理场由 n 个场量 $\varphi^\alpha(x)$ 描述 $(\alpha=1,2,\cdots,n)$, $x=(x_0, x_i)(x_0=t; i=1,2,3)$; 平坦时空度规 $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1\ -1\ -1\ -1)$, 其中 $\mu,\nu=0,1,2,3$. 设场的运动由含高阶微商的Lagrange量来描述,其泛函形式为

$$L=L[\varphi^\alpha_{(0)},\varphi^\alpha_{(1)},\cdots,\varphi^\alpha_{(N)}]=\int_V \mathscr{L}\mathrm{d}V \qquad (7\text{-}10\text{-}1)$$

式中: $\varphi^\alpha_{(0)}=\varphi^\alpha$, $\varphi^\alpha_{(1)}=\dot{\varphi}^\alpha$ 等; $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, 其中 V 为场所在空间区域. 利用 Ostrogradsky 变换,引入正则动量

$$\pi_\alpha^{(N-1)}=\frac{\delta L}{\delta\varphi^\alpha_{(N)}} \qquad (7\text{-}10\text{-}2a)$$

$$\pi_\alpha^{(s-1)}=\frac{\delta L}{\delta\varphi^\alpha_{(s)}}-\dot{\pi}_\alpha^{(s)}\quad (s=1,2,\cdots,N-1) \qquad (7\text{-}10\text{-}2b)$$

或

$$\pi_\alpha^{(s-1)}=\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\frac{\delta L}{\delta\varphi^\alpha_{(j+s)}} \qquad (7\text{-}10\text{-}2c)$$

可将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述. 系统的正则 Hamilton 量

$$H_c[\varphi^{\alpha}_{(s)},\pi^{(s)}_{\alpha}]=\int_V \mathscr{H}_c\,\mathrm{d}V=$$

$$\int_V (\pi^{(s)}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(s+1)}-\mathscr{L})\mathrm{d}V \qquad (7\text{-}10\text{-}3)$$

它借助于(7-10-2a)式消去其中最高阶导数 $\varphi^{\alpha}_{(N)}$而得. 重复指标代表求和,α 由 1 到 n,s 由 0 到 $N-1$. 对奇异 Lagrange 量系统,其广义 Hess 矩阵$[H_{\alpha\beta}]$是退化的,即

$$\det|H_{\alpha\beta}|=\det\left|\frac{\delta^2 L}{\delta\varphi^{\alpha}_{(N)}\delta\varphi^{\beta}_{(N)}}\right|=0 \qquad (7\text{-}10\text{-}4)$$

因而由(7-10-2a)式,不能全部解出 $\varphi^{\alpha}_{(N)}$作为正则变量 $\varphi^{\alpha}_{(s)}$和 $\pi^{(s)}_{\alpha}$的函数. 设 Hess 矩阵的秩为 R,于是正则变量在相空间中存在 $n-R$个约束条件,即

$$\Phi^0_a(\varphi^{\alpha}_{(s)},\pi^{(s)}_{\alpha})=0 \quad (a=1,2,\cdots,n-R) \qquad (7\text{-}10\text{-}5)$$

并称(7-10-5)式为初级约束. 此广义约束 Hamilton 系统的广义正则方程

$$\dot{\varphi}^{\alpha}_{(s)}=\{\varphi^{\alpha}_{(s)},H_{\mathrm{T}}\},\ \dot{\pi}^{(s)}_{\alpha}=\{\pi^{(s)}_{\alpha},H_{\mathrm{T}}\} \qquad (7\text{-}10\text{-}6)$$

式中:H_{T} 为总 Hamilton 量,

$$H_{\mathrm{T}}=H_c+H'=\int_V (H_c+\lambda^a\Phi^0_a)\,\mathrm{d}V \qquad (7\text{-}10\text{-}7)$$

而 $\lambda^a(x)$ 为拉氏乘子;$\{\ \cdot,\cdot\ \}$代表场的广义 Poisson 括号,即

$$\{F,G\}=\int_V\left(\frac{\delta F}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\frac{\delta G}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}-\frac{\delta F}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}\frac{\delta G}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right)\mathrm{d}V \qquad (7\text{-}10\text{-}8)$$

按约束系统的 Dirac 理论,由约束的相容性条件,可逐次确定次级约束,即

$$\Phi^k_a=\{\Phi^{k-1}_a,H_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \qquad (7\text{-}10\text{-}9)$$

直至 Φ^m_a 适合

$$\Phi^{m+1}_a=\{\Phi^m_a,H_{\mathrm{T}}\}=c^b_{ak}\Phi^k_b \quad (k\leqslant m) \qquad (7\text{-}10\text{-}10)$$

为止. 所有约束$\{\Phi_c\}$可分为两类:一个约束 Φ_a 如果对其他约束 Φ_b 均适合$\{\Phi_a,\Phi_b\}=0(\mathrm{mod}\ \Phi_c)$,则称 Φ_a 属于第一类约束;否

则，约束是第二类的.

按高阶微商系统的 Dirac 猜想，所有第一类约束(包括初级和次级约束)均是规范变换的生成元. 如果这个猜想成立，那么含有初级第一类约束 $\Phi_a^0 \approx 0 (a=1,2,\cdots,k)$ 和次级第一类约束 $\chi_b \approx 0$ $(b=1,2,\cdots,m)$ 的系统，其运动方程应由扩展 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{E}} = \int_V (H_c + \lambda^a \Phi_a^0 + \mu^b \chi_b) \mathrm{d}V \qquad (7\text{-}10\text{-}11)$$

导出，其中 $\lambda^a(x)$ 和 $\mu^b(x)$ 均为 Lagrange(约束)乘子. 长期以来，对 Dirac 猜想一直有争论. 前面已举出反例，说明 Dirac 猜想失效. 从系统总 Hamilton 量出发导致的广义正则方程，可与对应的 Lagrange方程等价. 因此，广义约束 Hamilton 系统的广义正则方程由(7-10-6)式给出.

考虑系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathscr{L}^{\mathrm{p}} \mathrm{d}V \mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V (\pi_a^{(s)} \varphi_{(s+1)}^a - \mathscr{H}_c) \mathrm{d}V \ \mathrm{d}t \qquad (7\text{-}10\text{-}12)$$

在时空坐标和正则变量的有限连续群下的变换性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x; \varphi_{(s)}^a, \pi_a^{(s)}) \\ \varphi_{(s)}^{a\prime}(x') &= \varphi_{(s)}^a(x) + \Delta\varphi_{(s)}^a(x) = \varphi_{(s)}^a(x) + \varepsilon_\sigma \xi_{(s)}^{a\sigma}(x; \varphi_{(s)}^a, \pi_a^{(s)}) \\ \pi_a^{(s)\prime}(x') &= \pi_a^{(s)}(x) + \Delta\pi_a^{(s)}(x) = \pi_a^{(s)}(x) + \varepsilon_\sigma \eta_a^{(s)\sigma}(x; \varphi_{(s)}^a, \pi_a^{(s)}) \end{aligned}\right\}$$

$$(7\text{-}10\text{-}13)$$

其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小参数. 假设在(7-10-13)式变换下，$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 的变更为一个四维散度项，$\Delta\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \varepsilon_\sigma \partial_\mu \Lambda^{\mu\sigma}$，则由(7-10-12)、(7-10-13)式有

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_a^{(s)}} \delta\pi_a^{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^a} \delta\varphi_{(s)}^a + \partial_\mu [(\pi_a^{(s)} \varphi_{(s+1)}^a - \mathscr{H}_c) \Delta x^\mu] +$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_{\alpha}^{(s)}\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}) = \varepsilon_{\sigma}\partial_{\mu}\Lambda^{\mu\sigma} \tag{7-10-14}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}} = \dot{\varphi}_{(s)}^{\alpha} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}} = -\dot{\pi}_{\alpha}^{(s)} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}} \tag{7-10-15}$$

$$\delta\pi_{\alpha}^{(s)} = \Delta\pi_{\alpha}^{(s)} - \pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\delta x^{\mu},\ \delta\varphi_{(s)}^{\alpha} = \Delta\varphi_{(s)}^{\alpha} - \varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\delta x^{\mu} \tag{7-10-16}$$

而 $\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}=\partial\pi_{\alpha}^{(s)}/\partial x^{\mu}$，等等. 假设在(7-10-13)式变换下，约束方程(7-10-5)式加在实质变分 $\delta\varphi^{\alpha}$ 和 $\delta\pi_{\alpha}$ 上的条件适合

$$\delta\Phi_{a}^{0} = \frac{\partial\Phi_{a}^{0}}{\partial\pi_{\alpha}^{(s)}}\delta\pi_{\alpha}^{(s)} + \frac{\partial\Phi_{a}^{0}}{\partial\varphi_{(s)}^{\alpha}}\delta\varphi_{(s)}^{\alpha} = 0 \tag{7-10-17}$$

用 Lagrange 乘子 $\lambda^{a}(x)$ 乘(7-10-17) 式并取和，联合(7-10-14)式，由约束 Hamilton 系统的正则方程(7-10-6)式得

$$\partial_{\mu}[(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma} - \Lambda^{\mu\sigma}] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})] = 0 \tag{7-10-18}$$

在四维时空中取一柱体，柱轴沿 t 轴方向，上底 V_1 和下底 V_2 分别为 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的超平面，在此四维柱体上对(7-10-18)式积分，利用四维 Gauss 定理及柱体侧面趋于无穷时场为 0 的条件，可得

$$\int_{V}[\pi_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{(s),k}^{\alpha}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}\tau^{0\sigma} - \Lambda^{0\sigma}]\mathrm{d}V = \mathrm{const}$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{7-10-19}$$

这样就得到高阶微商场论中，奇异 Lagrange 量系统正则形式的广义 Noether 第一定理：如果在(7-10-13)式变换下，正则形式的 Lagrange量密度 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 的改变为一个四维散度项，且约束方程(7-10-5)式在(7-10-13)式所确定的实质(定域)变分下不变，那么该广义约束 Hamilton 系统就存在 r 个守恒律(7-10-19)式. 这个结果是有限自由度情形的推广[33,40].

如何确定 $\tau^{\mu\sigma}$、$\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}$、$\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}$使其生成的变换保持 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 仅改变一个散度项呢？例如 $N=1$ 时，由于 $\tau^{\mu\sigma}$、$\xi^{\alpha\sigma}$、η_{α}^{σ} 中均不含 $\dot{\pi}_{\alpha}$，比较(7-10-

14)式中两端各阶 $\dot{\pi}_a$ 的系数，可得一组含未知量 $\tau^{\mu\sigma}$、$\xi^{a\sigma}$、η^{σ}_{a} 的偏微分方程. 结合(7-10-17)式，在 H_c 和 $\Lambda^{\mu\sigma}$给定后，这组方程的解所生成的变换，将保持 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 仅改变一个散度项，从而有守恒律(7-10-19)式.

2. 正则形式的广义 Noether 恒等式

现在讨论系统在无限连续群下的变换性质. 一般而言，系统的 Lagrange 量在定域变换下是非不变的. 例如：有质量的杨-Mills 场的 Lagrange 量在规范变换下是变更的；BRST 不变的理论，在规范变换的单独变换下也是非不变的，等等. 因此，讨论系统在定域变换下的非不变性质是必要的.

现考虑由时空坐标和正则变量的变换所形成的无限连续群. 其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^{\mu} + R^{\mu}_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \\ \varphi^{a\prime}_{(s)}(x') &= \varphi^{a}_{(s)}(x) + S^{a}_{(s)\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \\ \pi^{(s)\prime}_{a}(x') &= \pi^{(s)}_{a}(x) + T^{(s)}_{a\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \end{aligned}\right\} \tag{7-10-20}$$

式中 $\varepsilon^{\sigma}(x)$ 为无穷小任意函数 $(\sigma = 1,2,\cdots,r)$，而

$$R^{\mu}_{\sigma} = a^{\mu\nu(k)}\partial_{\nu(k)},\quad S^{a}_{(s)\sigma} = b^{a\nu(l)}_{(s)\sigma}\partial_{\nu(l)},\quad T^{(s)}_{a\sigma} = c^{(s)\nu(m)}_{a\sigma}\partial_{\nu(m)} \tag{7-10-21}$$

$$\nu(n) = \underbrace{\nu\cdots\rho}_{n},\ \partial_{\nu(n)} = \underbrace{\partial_{\nu}\cdots\partial_{\rho}}_{n} \tag{7-10-22}$$

系数 a、b、c 等均是 x、$\varphi^{a}_{(s)}$、$\pi^{(s)}_{a}$ 的函数. 假设在(7-10-20)式变换下，正则作用量的变分

$$\delta I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{V}[\partial_{\mu}(\Lambda^{\mu}_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}) + V_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}]\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t \tag{7-10-23}$$

式中 Λ^{μ}_{σ} 和 V_{σ} 均为线性微分算符. 其中

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma} = u^{\mu\nu(i)}_{\sigma}\partial_{\nu(i)},\quad V_{\sigma} = v^{\nu(n)}_{\sigma}\partial_{\nu(n)} \tag{7-10-24}$$

系数 u、v 等均为 x、$\varphi^{a}_{(s)}$、$\pi^{(s)}_{a}$ 的函数. 由(7-10-12)、(7-10-16)、(7-10-20)、(7-10-23)式有

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left\{ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha^{(s)}} (T_{\alpha\sigma}^{(s)} - \pi_{\alpha,\mu}^{(s)} R_\sigma^\mu) \varepsilon^\sigma + \right.$$

$$\left. \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^\alpha} (S_{(s)\sigma}^\alpha - \varphi_{(s),\mu}^\alpha R_\sigma^\mu) \varepsilon^\sigma - V_\sigma \varepsilon^\sigma \right\} \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left\{ \partial_\mu (\Lambda_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma - \mathscr{L}^{\mathrm{p}} R_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma) - \right.$$

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\pi_\alpha^{(s)} (S_{(s)\sigma}^\alpha - \varphi_{(s),\mu}^\alpha R_\sigma^\mu) \varepsilon^\sigma] \right\} \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t \qquad (7\text{-}10\text{-}25)$$

由于 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的任意性，可选它们及其所需的各阶偏微商在四维时空区域的边界上为 0，这样(7-10-25)式右端化为 0. 将(7-10-25)式左端各项分部积分，再利用 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的任意性，由变分学基本引理得

$$\tilde{T}_{\alpha\sigma}^{(s)} \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha^{(s)}} \right) - \tilde{R}_\sigma^\mu \left(\pi_{\alpha,\mu}^{(s)} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_\alpha^{(s)}} \right) + \tilde{S}_{(s)\sigma}^\alpha \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^\alpha} \right) -$$

$$\tilde{R}_\sigma^\mu \left(\varphi_{(s),\mu}^\alpha \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^\alpha} \right) - \tilde{V}_\sigma(1) = 0$$

$$(\sigma = 1, 2, \cdots, r) \qquad (7\text{-}10\text{-}26)$$

式中 $\tilde{R}_\sigma^\mu$、$\tilde{S}_{(s)\sigma}^\alpha$、$\tilde{T}_{\alpha\sigma}^{(s)}$ 和 $\tilde{V}_\sigma$ 分别为 R_σ^μ、$S_{(s)\sigma}^\alpha$、$T_{\alpha\sigma}^{(s)}$ 和 V_σ 的伴随算符[47].

这样就得到了非不变系统正则形式的广义 Noether 第二定理：如果系统的正则作用量在(7-10-20)式变换下适合(7-10-23)式，那么该系统就存在 r 个含泛函导数 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha$ 和 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta\pi_\alpha^{(s)}$ 的微分恒等式，并称(7-10-26)式为正则形式的广义 Noether 恒等式. 这一结果也是有限自由度情形的推广[33,40]. 恒等式(7-10-26)式的成立与 $\varphi_{(s)}^\alpha$、$\pi_\alpha^{(s)}$ 是否为运动方程(7-10-6)式的解无关. 它表明，泛函导数 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha$ 和 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta\pi_\alpha^{(s)}$ 及其微商是不独立的，在(7-10-20)式变换下，(7-10-26)式是 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha$ 和 $\delta I^{\mathrm{p}}/\delta\pi_\alpha^{(s)}$ 应适合的关系式.

当 $\varphi_{(s)}^\alpha$、$\pi_\alpha^{(s)}$ 为运动方程(7-10-6)式的解时，沿着约束系统运动的轨线，由(7-10-6)、(7-10-7)、(7-10-15)、(7-10-26)式，得场的正则变量和 Lagrange 乘子所适合的附加条件，即

$$\tilde{T}_{\alpha\sigma}^{(s)}\left(\frac{\delta H'}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)-\tilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left(\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\frac{\delta H'}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)+\tilde{S}_{(s)\sigma}^{\alpha}\left(\frac{\delta H'}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right)-$$

$$\tilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left(\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\frac{\delta H'}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right)-\tilde{V}_{\sigma}(1)=0$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,r) \qquad (7\text{-}10\text{-}27)$$

3. 强守恒律和弱守恒律

由正则形式的广义 Noether 恒等式，在某些情形下可得不依赖于运动方程的强守恒律，沿着约束系统运动的轨线可得弱守恒律，并且还可以证明，某些非不变系统亦含 Dirac 约束.

设在变换(7-10-20)式中，取

$$\left.\begin{aligned} R_{\sigma}^{\mu}&=a_{\sigma}^{\mu}\\ S_{(s)\sigma}^{\alpha}&=b_{(s)\sigma}^{\alpha}+b_{(s)\sigma}^{\alpha\mu}\partial_{\mu}+b_{(s)\sigma}^{\alpha\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\\ T_{\alpha\sigma}^{(s)}&=c_{\alpha\sigma}^{(s)}+c_{\alpha\sigma}^{(s)\mu}\partial_{\mu}+c_{\alpha\sigma}^{(s)\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}10\text{-}28)$$

式中 a、b、c 等均为 x、$\varphi_{(s)}^{\alpha}$、$\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的函数. 在(7-10-28)式的变换下，设(7-10-23) 式中的

$$V_{\sigma}=v_{\sigma}+v_{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}+v_{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \qquad (7\text{-}10\text{-}29)$$

式中 v_{σ}、v_{σ}^{μ}、$v_{\sigma}^{\mu\nu}$ 等均为 x、$\varphi_{(s)}^{\alpha}$、$\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的函数. 例如二阶微商有质量杨-Mills场理论就属于这种情况. 在(7-10-28)式确定的变换下，由(7-10-25)、(7-10-29)式得基础恒等式，即

$$\begin{aligned}&\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}(c_{\alpha\sigma}^{(s)}+c_{\alpha\sigma}^{(s)\mu}\partial_{\mu}+c_{\alpha\sigma}^{(s)\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}-\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}a_{\sigma}^{\mu})\varepsilon^{\sigma}+\\ &\quad\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}(b_{(s)\sigma}^{\alpha}+b_{(s)\sigma}^{\alpha\mu}\partial_{\mu}+b_{(s)\sigma}^{\alpha\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}-\\ &\quad\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}a_{\sigma}^{\mu})\varepsilon^{\sigma}+\partial_{\mu}(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}a_{\sigma}^{\mu}\varepsilon^{\sigma})=\\ &\quad\partial_{\mu}(\Lambda_{\sigma}^{\mu}\varepsilon^{\sigma})+(v_{\sigma}+v_{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}+v_{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu})\varepsilon^{\sigma}\end{aligned} \qquad (7\text{-}10\text{-}30)$$

此时广义 Noether 恒等式(7-10-26)式化为

$$c_{\alpha\sigma}^{(s)}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}-\partial_{\mu}\left(c_{\alpha\sigma}^{(s)\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)+\partial_{\mu}\partial_{\nu}\left(c_{\alpha\sigma}^{(s)\mu\nu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)-a_{\sigma}^{\mu}\left(\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)+$$

$$b^{\alpha}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}-\partial_{\mu}\left(b^{\alpha\mu}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right)+\partial_{\mu}\partial_{\nu}\left(b^{\alpha\mu\nu}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right)-$$

$$a^{\mu}_{\sigma}\left(\varphi^{\alpha}_{(s),\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right)=v_{\sigma}-\partial_{\mu}v^{\mu}_{\sigma}+\partial_{\mu}\partial_{\nu}v^{\mu\nu}_{\sigma}\qquad(7\text{-}10\text{-}31)$$

用 ε^{σ} 乘(7-10-31)式并对 σ 从 1 到 r 求和，将所得结果与(7-10-30)式相减，在系数 $v^{\mu\nu}_{\sigma}$、$b^{\alpha\mu\nu}_{(s)\sigma}$、$c^{(s)\mu\nu}_{\alpha\sigma}$关于指标 μ 和 ν 对称时(例如二阶微商的有质量杨-Mills 理论)得

$$\partial_{\mu}\left\{\left[b^{\alpha\mu}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}+c^{(s)\mu}_{\alpha\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}+\partial_{\nu}\left(b^{\alpha\mu\nu}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right)-\left(b^{\alpha\mu\nu}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right)\partial_{\nu}+\right.\right.$$

$$\partial_{\nu}\left(c^{(s)\mu\nu}_{\alpha\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}\right)-\left(c^{(s)\mu\nu}_{\alpha\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}\right)\partial_{\nu}+\mathscr{L}^{\mathrm{p}}a^{\mu}_{\sigma}-$$

$$\left.\left.\Lambda^{\mu}_{\sigma}-v^{\mu}_{\sigma}+\partial_{\nu}v^{\mu\nu}_{\sigma}-v^{\mu\nu}_{\sigma}\partial_{\nu}\right]\varepsilon^{\sigma}\right\}+$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\pi^{(s)}_{\alpha}(S^{\alpha}_{(s)\sigma}-\varphi^{\alpha}_{(s),\mu}a^{\mu}_{\sigma})\varepsilon^{\sigma}\right]=0\qquad(7\text{-}10\text{-}32)$$

将(7-10-32)式在 $t=\mathrm{const}$ 的类空超曲面 V 上积分，得强守恒律

$$J=\int_{V}j_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}\mathrm{d}V=\mathrm{const}\qquad(7\text{-}10\text{-}33)$$

式中

$$j_{\sigma}=b^{\alpha0}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}+c^{(s)0}_{\alpha\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}+\partial_{\nu}\left(b^{\alpha0\nu}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right)-$$

$$\left(b^{\alpha0\nu}_{(s)\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right)\partial_{\nu}+\partial_{\nu}\left(c^{(s)0\nu}_{\alpha\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}\right)-\left(c^{(s)0\nu}_{\alpha\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}\right)\partial_{\nu}+$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}a^{0}_{\sigma}-\Lambda^{0}_{\sigma}-v^{0}_{\sigma}+\partial_{\nu}v^{0\nu}_{\sigma}-v^{0\nu}_{\sigma}\partial_{\nu}+$$

$$\pi^{(s)}_{\alpha}(b^{\alpha}_{(s)\sigma}+b^{\alpha\rho}_{(s)\sigma}\partial_{\rho}+b^{\alpha\rho\nu}_{(s)\sigma}\partial_{\rho}\partial_{\nu}-\varphi^{\alpha}_{(s),\rho}a^{\rho}_{\sigma})\qquad(7\text{-}10\text{-}34)$$

导出(7-10-33)式，并未利用系统的运动方程，因此强守恒律(7-10-33)式的成立与 $\varphi^{\alpha}_{(s)}$和 $\pi^{(s)}_{\alpha}$ 是否适合运动方程无关.

设定域变换群有子群，且 $\varepsilon^{\sigma}(x)=\varepsilon_0^{\rho}\xi_{\rho}^{\sigma}(x)$，$\varepsilon_0^{\rho}$ 为李群的数值参数，沿着系统运动的“轨线”，有弱守恒律

$$\begin{aligned}J_{\rho}^{w}=\int_V\Bigg\{\Bigg[&b_{(s)\sigma}^{\alpha 0}\frac{\delta H'}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}+c_{\alpha\sigma}^{(s)0}\frac{\delta H'}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}+\partial_{\nu}\left(b_{(s)\sigma}^{\alpha 0\nu}\frac{\delta H'}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right)-\\&\left(b_{(s)\sigma}^{\alpha 0\nu}\frac{\delta H'}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right)\partial_{\nu}+\partial_{\nu}\left(c_{\alpha\sigma}^{(s)0\nu}\frac{\delta H'}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)-\left(c_{\alpha\sigma}^{(s)0\nu}\frac{\delta H'}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)\partial_{\nu}+\\&\mathscr{L}^{\mathrm{P}}a_{\sigma}^{0}-\Lambda_{\sigma}^{0}-v_{\sigma}^{0}+\partial_{\nu}v_{\sigma}^{0\nu}-v_{\sigma}^{0\nu}\partial_{\nu}+\pi_{\alpha}^{(s)}(b_{(s)\sigma}^{\alpha}+\\&b_{(s)\sigma}^{\alpha\lambda}\partial_{\lambda}+b_{(s)\sigma}^{\alpha\lambda\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}-\varphi_{(s),\lambda}^{\alpha}a_{\sigma}^{\lambda})\Bigg]\xi_{\rho}^{\sigma}\Bigg\}\mathrm{d}V=\mathrm{const}\end{aligned}\tag{7-10-35}$$

在规范场理论中涉及到上述子群. 可见，广义 Noether 恒等式，在一些情形下即使是非不变系统沿约束系统运动的“轨线”，那么该恒等式也可化为(弱)守恒律. 这种导致守恒律的程式与 Noether 第一定理是完全不同的[48,49].

在 Lagrange 体制中，规范不变的系统必含 Dirac 约束. 利用正则形式的广义 Noether 恒等式，可进一步研究系统是否含约束. 由(7-10-2)、(7-10-15)式不难看出，当(7-10-31)式中含 φ^{β} 最高阶时间微商项之和应为 0，而与其他项无关时，就有

$$b_{(0)\sigma}^{\alpha 00}\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\varphi_{(N)}^{\alpha}\partial\varphi_{(N)}^{\beta}}\varphi_{(2N+1)}^{\beta}=0\tag{7-10-36}$$

(7-10-36)式对任意 φ^{β} 的$(2N+1)$阶时间微商均成立，于是有

$$b_{(0)\sigma}^{\alpha 00}H_{\alpha\beta}=0\tag{7-10-37}$$

由于 $b_{(0)\sigma}^{\alpha 00}$不全为 0，(7-10-37)式表明 $\det|H_{\alpha\beta}|=0$，即广义 Hess 矩阵退化，系统的 Lagrange 量是奇异的，它必含 Dirac 约束. 可见，这种非不变系统亦为广义约束 Hamilton 系统.

§7-11 高阶微商场论中的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量

Poincaré-Cartan 积分不变量在经典力学和场论中占重要地

位，该不变量已推广到奇异 Lagrange 量系统. 这里将其推广到高阶微商场论中的奇异 Lagrange 量系统. 其出发点与传统的基于位形空间中的分析不同，而是从正则作用量出发，考虑系统在增广相空间中的变换性质，要求正则约束在该变换确定的实质变分(而不是总变分)下不变，导出了高阶微商场论中奇异系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 这种从相空间分析出发，可较方便地讨论该不变量与广义正则方程和正则变换的联系.

将空间变量 x_i 视为固定参量[9]，相空间中的正则变量分别为 $\psi^a_{(s)}(t;x_i)$ 和 $\pi^{(s)}_a(t;x_i)$，此时相空间的曲线可表示为

$$\psi^a_{(s)} = \psi^a_{(s)}(t;\theta), \pi^{(s)}_a = \pi^{(s)}_a(t;\theta) \tag{7-11-1}$$

其中 θ 为参量. 考虑由于参量 θ 变化而形成的增广相空间中的变换：

$$\left.\begin{aligned} & t \to t' = t + \Delta t(\theta) \\ & \psi^a_{(s)}(t;x_i) \to \psi^{a\prime}_{(s)}(t';x_i) = \psi^a_{(s)}(t;x_i) + \Delta\psi^a_{(s)}(t;x_i,\theta) \\ & \pi^{(s)}_a(t;x_i) \to \pi^{(s)\prime}_a(t';x_i) = \pi^{(s)}_a(t;x_i) + \Delta\pi^{(s)}_a(t;x_i,\theta) \end{aligned}\right\} \tag{7-11-2}$$

式中参量 θ 适合

$$\left.\begin{aligned} \psi^{a\prime}_{(s)}(t';x_i,0) = \psi^a_{(s)}(t;x_i) \\ \pi^{(s)\prime}_a(t';x_i,0) = \pi^{(s)}_a(t;x_i) \end{aligned}\right\} \tag{7-11-3}$$

在变换(7-11-2)式中，对小参量 θ 正则作用量 I^{p} 的变分

$$\begin{aligned} \Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\delta\theta = & \int_{t_1}^{t_2}\int_V \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^a_{(s)}}\delta\psi^a_{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_a}\delta\pi^{(s)}_a \right) \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t + \\ & \int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\partial_0(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}\delta x^0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_a\delta\psi^a_{(s)}) \right] \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t = \\ & \int_{t_1}^{t_2}\int_V \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^a_{(s)}}\delta\psi^a_{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_a}\delta\pi^{(s)}_a \right) \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t + \\ & \left[\int_V (\pi^{(s)}_a\Delta\psi^a_{(s)} - \mathscr{H}_c)\mathrm{d}V \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \tag{7-11-4a}$$

其中

$$\delta\psi^{a}_{(s)} = \Delta\psi^{a}_{(s)} - \psi^{a}_{(s),0}\Delta x^{0},\ \delta\pi^{(s)}_{a} = \Delta\pi^{(s)}_{a} - \pi^{(s)}_{a,0}\Delta x^{0} \quad (7\text{-}11\text{-}4\text{b})$$

假设约束 $\Phi^{0}_{a}=0$ 加在变分 $\delta\psi_{(s)}$和 $\delta\pi^{(s)}$上的条件适合

$$\delta\Phi^{0}_{a} = \frac{\partial\Phi^{0}_{a}}{\partial\psi^{a}_{(s)}}\delta\psi^{a}_{(s)} + \frac{\partial\Phi^{0}_{a}}{\partial\pi^{(s)}_{a}}\delta\pi^{(s)}_{a} = 0 \quad (7\text{-}11\text{-}5)$$

用 Lagrange 乘子 $\lambda^{a}(x)$ 乘(7-11-5)式,并对 a 求和再在四维时空区域上积分,将所得结果与(7-11-4a)式相加,利用约束系统的正则方程(7-10-6)式,得

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\delta\theta = \int_{V}(\pi^{(s)}_{a}\Delta\psi^{a}_{(s)} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Delta t)\mathrm{d}V\Big|^{t_2}_{t_1} \quad (7\text{-}11\text{-}6)$$

在 t、$\psi^{a}_{(s)}$、$\pi^{(s)}_{a}$ 所张成的增广相空间中,取一条满足约束条件$\Phi^{0}_{a}(x;\psi^{a}_{(s)},\pi^{(s)}_{a})=0$ 的闭曲线 C_1. 由于约束条件,闭曲线 C_1 实际上是在某子空间 Γ_{p} 中. 设闭曲线 C_1 的方程为

$$t_1 = t_1(\theta),\ \psi^{a}_{(s)1} = \psi^{a}_{(s)1}(t,\theta),\ \pi^{(s)}_{a1} = \pi^{(s)}_{a1}(t,\theta) \quad (7\text{-}11\text{-}7)$$

这里 $\theta=0$ 和 $\theta=l$ 代表闭曲线 C_1 上同一点. 过 C_1 上的任一点,有一条适合(7-10-6)式的“轨线”;过 C_1 上每一点的“轨线”构成一个“轨线管”. 在这个轨线管上取另一条闭曲线 C_2,使它包围此轨线管并和轨线管的母线仅交于一点. 设闭曲线 C_2 的方程为

$$t_2 = t_2(\theta),\psi^{a}_{(s)2} = \psi^{a}_{(s)2}(t,\theta),\pi^{(s)}_{a2} = \pi^{(s)}_{a2}(t,\theta) \quad (7\text{-}11\text{-}8)$$

将 (7-11-6) 式在$[0,l]$上分别沿 C_1 和 C_2 积分,得[46]

$$\oint_{C_1}\int_{V}(\pi^{(s)}_{a}\Delta\psi^{a}_{(s)} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Delta t)\mathrm{d}V =$$

$$\oint_{C_2}\int_{V}(\pi^{(s)}_{a}\Delta\psi^{a}_{(s)} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Delta t)\mathrm{d}V = \mathrm{inv} \quad (7\text{-}11\text{-}9)$$

于是得到:对增广相空间中由约束 $\Phi^{0}_{a}=0$ 决定的子空间 Γ_{p} 中的任一闭曲线 C,沿 C 的积分

$$J = \oint_{C}\int_{V}(\pi^{(s)}_{a}\Delta\psi^{a}_{(s)} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Delta t)\mathrm{d}V \quad (7\text{-}11\text{-}10)$$

在 C 沿约束系统的“轨线管”的移动和变形下,J 是一个不变量,并

称 J 为高阶微商场论中奇异 Lagrange 量系统的广义 Poincaré-Cartan 不变量.

将整个空间区域 V 分成许多小格子,第 i 个格子的体积元记为 ΔV_i,场量 $\psi^a_{(s)}(x)$ 在 ΔV_i 上的平均值记为 $\psi^a_{(s)i}(t)$,对应于 $\psi^a_{(s)i}(t)$ 的正则共轭动量记为 $p_a^{(s)i}(t)$. 由于 $p_a^{(s)i}(t) = \pi_a^{(s)i}\Delta V_i$ (对 i 不求和),离散化(7-11-10)式可写为

$$J = \oint_C (p_a^{(s)i}\Delta\psi^a_{(s)i} - H_c\Delta t) \tag{7-11-11}$$

当 $\Delta V_i \to 0$ 时,(7-11-11)式的连续极限就是(7-11-10)式. 利用这个结果,不难将广义力学的结果推广到高阶微商场论中来. 设动力学系统所含的初级约束为 $\Phi^0_a=0$,运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi}^a_{(s)} &= F^a_{(s)}(x;\psi^a_{(s)},\pi_a^{(s)},\lambda^a)\\ \dot{\pi}_a^{(s)} &= G_a^{(s)}(x;\psi^a_{(s)},\pi_a^{(s)},\lambda^a)\end{aligned}\right\} \tag{7-11-12}$$

那么,方程组(7-11-12)式为约束系统广义正则方程的条件是:(7-11-10)积分式在闭曲线 C 沿约束系统"轨线管"移动和变形下为不变量.

高阶微商场论奇异 Lagrange 量系统的正则变换可表述为:设动力学系统的广义正则方程(7-10-6)式,通过变量代换使 $\psi^a_{(s)}$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 换为新的正则变量 $\overline{\psi}^a_{(s)}$ 和 $\overline{\pi}_a^{(s)}$,其中

$$\left.\begin{aligned}\overline{\psi}^a_{(s)} &= Q^a_{(s)}(t;\psi^a_{(s)},\pi_a^{(s)})\\ \overline{\pi}_a^{(s)} &= P_a^{(s)}(t;\psi^a_{(s)},\pi_a^{(s)})\end{aligned}\right\} \tag{7-11-13}$$

如果(7-11-13)式变换使得约束系统对新变量而言,其广义正则方程(7-10-6)式的形式不变,则(7-11-13)式变换就称为广义正则变换. 假使在(7-11-13)式的变换下,存在两个泛函 $\overline{H}_c = \int_V \overline{\mathscr{H}}_c \mathrm{d}V$ 和 G,使得

$$\int_V (\pi_a^{(s)}\Delta\psi^a_{(s)} - \mathscr{H}_c\Delta t)\mathrm{d}V =$$

$$\int_V (\overline{\pi}_a^{(s)} \Delta \overline{\psi}_{(s)}^a - \overline{\mathscr{H}}_c \Delta t) \mathrm{d}V + \Delta G \tag{7-11-14}$$

那么，(7-11-13) 式变换就为广义正则变换，G 称为母函数.

事实上，取增广相空间中位于 Γ_p 中的任一闭曲线 C，由(7-11-14)式有

$$\oint_C \left[\int_V (\pi_a^{(s)} \Delta \psi_{(s)}^a - \mathscr{H}_c \Delta t) \mathrm{d}V - \right.$$
$$\left. \int_V (\overline{\pi}_a^{(s)} \Delta \overline{\psi}_{(s)}^a - \overline{\mathscr{H}}_c \Delta t) \mathrm{d}V \right] = 0 \tag{7-11-15}$$

设 $\overline{C}$ 为 C 经过变换(7-11-13)式而得到的闭曲线，(7-11-15)式又可写为

$$\oint_C \int_V (\pi_a^{(s)} \Delta \psi_{(s)}^a - \mathscr{H}_c \Delta t) \mathrm{d}V =$$
$$\oint_{\overline{C}} \int_V (\overline{\pi}_a^{(s)} \Delta \overline{\psi}_{(s)}^a - \overline{\mathscr{H}}_c \Delta t) \mathrm{d}V \tag{7-11-16}$$

由于 $\psi_{(s)}^a$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 适合运动方程(7-10-6)式，(7-11-16)式左端为广义 Poincaré-Cartan 积分不变量，即闭曲线 C 沿(7-10-6)式的解所确定的动力学“轨线管”上移动和变形下，(7-11-16)式左端为积分不变量. 相应的(7-11-16)式右端也在 $\overline{C}$ 沿变换(7-11-13)式所得的“轨线管”上移动和变形时为不变量，即(7-11-16)式的右端对变换后的新变量而言，仍为广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 这样，变换后的“轨线”必适合约束系统的广义正则方程，即(7-11-13)式变换为广义正则变换.

值得指出的是：条件(7-11-5)式，对于导出广义 Poincaré-Cartan 积分不变量(7-11-10)式是必须的. 如果像其他作者那样[34,35]，要求约束条件在(7-11-2)式变换下总变分不变，即

$$\Delta \Phi_a^0 = \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial \psi_{(s)}^a} \Delta \psi_{(s)}^a + \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial \pi_a^{(s)}} \Delta \pi_a^{(s)} =$$
$$\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial \psi_{(s)}^a} (\delta \psi_{(s)}^a + \psi_{(s),0}^a \delta x^0) +$$

$$\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial \pi_a^{(s)}}(\delta \pi_a^{(s)} + \pi_{a,0}^{(s)} \delta x^0) = 0 \qquad (7\text{-}11\text{-}17)$$

对显含时间的约束，由约束的相容性（自洽性）条件有

$$\dot{\Phi}_a^0 = \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial \psi_{(s)}^a} \psi_{(s),0}^a + \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial \pi_a^{(s)}} \pi_{a,0}^{(s)} = 0 \quad (7\text{-}11\text{-}18)$$

由(7-11-4a)、(7-11-17)、(7-11-18)式可得

$$\Delta I^{\mathrm{P}} = I^{\mathrm{P}\prime}(\theta)\delta\theta = \int_V (\pi_a^{(s)} \Delta \psi_{(s)}^a - \mathscr{H}_{\mathrm{c}} \Delta t) \mathrm{d}V \Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \lambda^a \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial t} \delta t \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t \qquad (7\text{-}11\text{-}19)$$

一般来说，由(7-11-19)式是不能导出 Poincaré-Cartan 积分不变量(7-11-10)式的. 这就是文献[34,35]中关于总变分和实质变分出现的混淆.

前面从正则形式出发导出了高阶微商场论中奇异 Lagrange 量系统在有限连续群下的不变性所相应的广义 Noether 第一定理，建立了无限连续群下非不变性系统的广义 Noether 恒等式，并指出了某些非不变性系统亦可能存在 Dirac 约束以及沿系统运动的轨线广义 Noether 恒等式可化为弱守恒律. 对非不变性系统这样得到守恒律的程式与 Noether 第一定理完全不同. 由于正则形式是非协变的[9]，因此，所得到的守恒量不同于 Lagrange 场论中协变守恒流的方程.

从正则作用量出发，注意区分实质变分与总变分，由约束方程在正则变量的实质变分下不变，导出了高阶微商场论中奇异 Lagrange系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量，并讨论了该不变量与广义正则方程和正则变换间的联系.

有关正则形式对称性质的研究，给分析系统的 Dirac 约束提供了有力的工具. 例如：由正则形式的广义 Noether 第一定理，考察由扩展 Hamilton 量导出的守恒量是否等于由经典 Noether 定

理所导致的守恒量，可以检查 Dirac 猜想是否有效，并已给出了反例[33,40]. 利用正则形式的广义 Noether 恒等式，也可以检查 Dirac[33,40]猜想的有效性. 如果 Dirac 猜想成立，那么沿着约束系统运动的轨线，(7-10-27)式将给出合理的结果，式中的 H' 应包含所有第一类约束. 当(7-10-27)式带来不自洽的结果时，表明 Dirac 猜想失败[33].

在导出 Poincaré-Cartan 积分不变量时，正确区分总变分和等时变分是非常重要的. 例如对于质点力学系统，在增广相空间的变换下，正则作用量的变分

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\alpha)\delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2}\Big[\Big(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\Big)\delta q^i + \Big(\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big)\delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\Delta q^i - H_c\Delta t)\Big]\mathrm{d}t \qquad (7\text{-}11\text{-}20)$$

如果类似于文献[34,35]中那样，要求约束在总变分下不变

$$\Delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}(\delta q^i + \dot{q}^i\delta t) + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}(\delta p_i + \dot{p}_i\delta t) = 0 \qquad (7\text{-}11\text{-}21)$$

利用 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)$，联合(7-11-20)、(7-11-21)式，由约束系统的正则方程和约束的自洽性条件 $\dot{\phi}_a^0=0$，得

$$[p_i\Delta q^i - H_c\Delta t]\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}\lambda^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial t}\Delta t\,\mathrm{d}t \qquad (7\text{-}11\text{-}22)$$

从(7-11-22)式一般是不能导致约束 Hamilton 系统的 Poincaré-Cartan 不变量的(除非约束 ϕ_a 不显含时间或变换中 $\Delta t=0$). 此外，如果要求(7-11-21)式成立，从文献[33,34]中得到

$$\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_c}{\partial t} \qquad (7\text{-}11\text{-}23)$$

此结果对正规 Lagrange 量系统才成立，但对奇异 Lagrange 量系统，由约束 Hamilton 系统的正则方程，有

$$\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_c}{\partial t} + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\dot{p}_i =$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial t}+\lambda^a\{H_c,\phi_a^0\} \tag{7-11-24}$$

按约束的相容性条件，又有

$$\dot{\phi}_a^0=\frac{\partial\phi_a^0}{\partial t}+\{\phi_a^0,H_c+\lambda^b\phi_b^0\}=0 \tag{7-11-25}$$

由(7-11-24)、(7-11-25)式得

$$\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H_c}{\partial t}+\lambda^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial t} \tag{7-11-26}$$

可见，对奇异 Lagrange 系统(7-11-23)式一般是不成立的，除非约束 ϕ_a 不显含时间. 这样，再一次看到要求约束在正则变量的总变分下不变来导出奇异系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量是不妥的；而应修改为采用约束在正则变量的等时变分下不变，才能正确地导出奇异 Lagrange 量系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量. 这样，就澄清了一些文献中出现的混淆. 在研究非完整系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量时，也出现类似的情况[50].

§7-12 高阶微商场论中的规范生成元

本节讨论高阶微商场论中规范生成元的构成. 设系统具有初级约束 $\Phi_a^0\approx0$. 由初级约束 Φ_a^0 的自洽性条件，可求得次级约束

$$\Phi_a^1=\{\Phi_a^0,H_{\mathrm{T}}\}\approx0 \tag{7-12-1}$$

按 Dirac-Bergman 算法程序，由次级约束的自洽性条件可逐次求出其他次级约束，即

$$\Phi_a^k=\{\Phi_a^{k-1},H_{\mathrm{T}}\}\approx0 \tag{7-12-2}$$

直至 Φ_a^m 适合

$$\Phi_a^{m+1}=\{\Phi_a^m,H_{\mathrm{T}}\}=c_{ak}^b\Phi_b^k\quad(k=0,1,\cdots,m) \tag{7-12-3}$$

为止. 全部约束可分为两类：一个约束 Φ_a 如果与其他所有约束 Φ_b 均适合 $\{\Phi_a,\Phi_b\}=0(\mathrm{mod}\ \Phi_c)$，则称 Φ_a 为第一类约束；否则，称为

第二类约束.

前面已经讨论,第一类约束可作为规范变换的生成元,它们生成物理态之间的等价变换.从规范变换保持系统的动力学方程和约束条件不变出发,可以得到规范变换生成元的构成.

先考虑系统仅含第一类约束,经规范变换后,由($\psi^a_{(s)}$,$\pi^{(s)}_a$,λ^a)描述的"轨线"与无穷小变更后的"轨线"($\psi^a_{(s)}+\delta\psi^a_{(s)}$,$\pi^{(s)}_a+\delta\pi^{(s)}_a$,$\lambda^a+\delta\lambda^a$)均满足方程

$$\dot{\psi}^a_{(s)} \approx \{\psi^a_{(s)},H_{\mathrm{T}}\},\ \dot{\pi}^{(s)}_a \approx \{\pi^{(s)}_a,H_{\mathrm{T}}\} \qquad (7\text{-}12\text{-}4)$$

$$\Phi^0_a(\psi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a) \approx 0 \qquad (7\text{-}12\text{-}5)$$

对于变更后的"轨线"($\psi^a_{(s)}+\delta\psi^a_{(s)}$,$\pi^{(s)}_a+\delta\pi^{(s)}_a$,$\lambda^a+\delta\lambda^a$),将方程(7-12-4)、(7-12-5)式按小量$\delta\psi^a_{(s)}$、$\delta\pi^{(s)}_a$和$\delta\lambda^a$展开,再与未变更的"轨线"($\psi^a_{(s)}$,$\pi^{(s)}_a$,λ^a)所适合的方程(7-12-4)、(7-12-5)式相减,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\psi^a_{(s)}) \approx \int\mathrm{d}^3x\left[\frac{\delta^2 H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^b_{(r)}\delta\pi^{(s)}_a}\,\delta\psi^b_{(r)} + \frac{\delta^2 H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi^{(r)}_b\delta\pi^{(s)}_a}\,\delta\pi^{(r)}_b\right] \qquad (7\text{-}12\text{-}6)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi^{(s)}_a) \approx -\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{\delta^2 H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^b_{(r)}\delta\psi^a_{(s)}}\,\delta\psi^b_{(r)} + \frac{\delta^2 H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi^{(r)}_b\delta\psi^a_{(s)}}\,\delta\pi^{(r)}_b\right] \qquad (7\text{-}12\text{-}7)$$

$$\frac{\partial\Phi^0_a}{\partial\psi^a_{(s)}}\,\delta\psi^a_{(s)} + \frac{\partial\Phi^0_a}{\partial\pi^{(s)}_a}\,\delta\pi^{(s)}_a \approx 0 \qquad (7\text{-}12\text{-}8)$$

设无穷小规范变换的生成元为G,那么

$$\delta\psi^a_{(s)} = \{\psi^a_{(s)},G\} = \frac{\delta G}{\delta\pi^{(s)}_a} \qquad (7\text{-}12\text{-}9\text{a})$$

$$\delta\pi^{(s)}_a = \{\pi^{(s)}_a,G\} = -\frac{\delta G}{\delta\psi^a_{(s)}} \qquad (7\text{-}12\text{-}9\text{b})$$

将(7-12-9)式代入(7-12-6)、(7-12-7)式,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta G}{\delta\pi^{(s)}_a}\right) + \left\{\frac{\delta G}{\delta\pi^{(s)}_a},H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \left\{\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi^{(s)}_a},G\right\} \qquad (7\text{-}12\text{-}10\text{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta G}{\delta\psi^a_{(s)}}\right) + \left\{\frac{\delta G}{\delta\psi^a_{(s)}},H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \left\{\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^a_{(s)}},G\right\} \qquad (7\text{-}12\text{-}10\text{b})$$

定域不变的规范变换含任意函数，无穷小规范变换的生成元的形式可设为

$$G(\varepsilon,\dot{\varepsilon},\ddot{\varepsilon},\cdots)=\int \mathrm{d}^3x\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_j^{(k)}G_k^j(\psi_{(s)}^a,\pi_a^{(s)}) \qquad (7\text{-}12\text{-}11)$$

$$(\varepsilon_j^{(k)}=\partial_0^k\varepsilon_j(x),\ k=0,1,\cdots,m)$$

其中 $\varepsilon_j(x)(j=1,2,\cdots,J)$ 为任意函数．将(7-12-9)、(7-12-11)式代入(7-12-8)式，并将(7-12-11)式代入(7-12-10)式．由于 $\varepsilon_j(x)$ 的任意性，在初级约束决定的超曲面上，得

$$\frac{\partial}{\partial\psi_{(s)}^a}[G_{k-1}^j+\{G_k^j,H_{\mathrm{T}}\}]=0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \qquad (7\text{-}12\text{-}12)$$

$$\frac{\partial}{\partial\pi_a^{(s)}}[G_{k-1}^j+\{G_k^j,H_{\mathrm{T}}\}]=0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \qquad (7\text{-}12\text{-}13)$$

$$\{G_k^j,\Phi_a^0\}=0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \qquad (7\text{-}12\text{-}14)$$

由于正则变量变更后的“轨线”仍保持在约束超曲面上，因此，对次级约束亦应要求 $\{G_k^j,\Phi_a^n\}=0$，这样，如果将 G_k^j 取为系统的约束，那么 G_k^j 均为第一类约束．又因为假设系统所有的约束均为第一类约束，于是(7-12-12)、(7-12-13)式中的 H_{T} 可用 H_{c} 代替，得到递推关系式

$$\{G_0^j,H_{\mathrm{c}}\}=0 \qquad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \qquad (7\text{-}12\text{-}15)$$

$$G_{k-1}^j+\{G_k^j,H_{\mathrm{c}}\}=0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \qquad (7\text{-}12\text{-}16)$$

$$G_m^j=0 \qquad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \qquad (7\text{-}12\text{-}17)$$

式中 G_m^j 为初级第一类约束．从(7-12-16)式，由 G_k^j 可导出 G_{k-1}^j，直至 G_0^j 适合(7-12-15)式为止．从每一个初级第一类约束 G_m^j 出发，都可按(7-12-16)式递推关系求出其他 G_k^j，然后由(7-12-11)式构造出规范生成元 G；由 G 产生的规范变换(7-12-9)式使广义约束系统的运动方程保持不变．由此可见，除了 χ^n-型约束外[33]，第一类约束均为规范变换的生成元的组成部分．

规范生成元也可以用另一种方式来构造[19]．将规范生成元表

示为(有限自由度情形)

$$G=\varepsilon_k^a(t)\Phi_a^k \quad (k=0,1,\cdots,m) \tag{7-12-18}$$

式中:Φ_a^k 均为第一类约束;$\varepsilon_k^a(t)$ 由下列条件确定,即

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\{G,H_{\mathrm{T}}\}=0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{7-12-19}$$

式中:H_{T} 可用 H_c 代替;规范变换生成元 G 应是守恒的. 由(7-12-18)、(7-12-19)式得

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_k^a}{\mathrm{d}t}+\{\varepsilon_k^a,H_c\}+\varepsilon_{k-1}^a+\varepsilon_m^b c_{bk}^a=0 \tag{7-12-20}$$

由(7-12-20)式可逐个确定 $\varepsilon_k^a(k<m)$,并用 $\varepsilon_m^a(t)$ 来表达它们,其中 $\varepsilon_m^a(t)$ 为任意函数. 只要 G 满足

$$\{G,\Phi_a^0\}=0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{7-12-21}$$

的条件,则 G 生成的变换保持系统作用量不变[19].

当系统同时含第二类约束时,如果从初级第一类约束导出的次级第一类约束与第二类约束完全分开,上述关于构造规范对称生成元的程序对第一类约束仍然适用.

下面给出几个应用实例.

1. 有质量规范场

高阶微商的有质量规范场 $B_\mu(x)$ 与标量场 $\eta(x)$ 的 Lagrange 量密度[33]

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}-\frac{c}{4}\partial_\sigma F_{\mu\nu}\partial^\sigma F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2B_\mu B^\mu-$$
$$mB_\mu\partial^\mu\eta+\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta \tag{7-12-22a}$$

式中 c 为常数,

$$G_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu \tag{7-12-22b}$$

标量场 $\eta(x)$ 的正则动量

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial(\partial_0\eta)}=-mB^0(x)+\dot{\eta}(x) \tag{7-12-23}$$

矢量场 $B^{\mu}_{(0)}(x) \equiv B^{\mu}(x)$ 和 $B^{\mu}_{(1)}(x) = \dot{B}^{\mu}(x)$ 的正则动量分别为

$$\pi_0^{(1)}(x) = 0 \tag{7-12-24a}$$

$$\pi_i^{(1)}(x) = c\partial^0 F_{0i}(x) \tag{7-12-24b}$$

$$\pi_0^{(0)}(x) = c\partial^0\partial^i F_{0i}(x) \tag{7-12-24c}$$

$$\pi_i^{(0)}(x) = c[\nabla^2 F_{0i}(x) + \partial_0\partial^j F_{ji}(x)] + F_{0i}(x) - \partial_0\pi_i^{(1)}(x) \tag{7-12-24d}$$

系统的正则 Hamilton 量

$$H_c = \int d^3x \mathscr{H}_c = \int d^3x\Big[\frac{1}{2c}(\pi_i^{(1)})^2 + \frac{1}{2}\pi^2 + \pi_i^{(1)}\partial^i B^0_{(1)} + \frac{c}{4}\partial_0 F_{ij}\partial^0 F^{ij} + \frac{c}{2}\partial_i F_{0j}\partial^i F^{0j} + \frac{c}{4}\partial_i F_{jk}\partial^i F^{jk} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \pi_\mu^{(0)}B^\mu_{(1)} + \frac{1}{2}m^2 B_i B^i + \frac{1}{2}\nabla\eta\cdot\nabla\eta - mB_i\partial^i\eta - (\partial^i\pi_i^{(0)} + m\pi)B^0\Big] \tag{7-12-25}$$

初级约束

$$\Phi^0 = \pi_0^{(1)} \approx 0 \tag{7-12-26}$$

总 Hamilton 量

$$H_T = \int d^3x(\mathscr{H}_c + \lambda\Phi^0) \tag{7-12-27}$$

式中 $\lambda(x)$ 为 Lagrange 乘子. 由约束的自洽性条件给出次级约束

$$\Phi^1 = \{\Phi^0, H_T\} = -\pi_0^{(0)} + \partial^i\pi_i^{(1)} \approx 0 \tag{7-12-28}$$

$$\Phi^2 = \{\Phi^1, H_T\} = \partial^i\pi_i^{(0)} + m\pi \approx 0 \tag{7-12-29}$$

其中$\{\cdot,\cdot\}$代表广义 Poisson 括号，由(7-10-8)式给出.

不难验证，所有约束 $\Phi^k(k=0,1,2)$ 均为第一类约束，按(7-12-11)、(7-12-15)～(7-12-17)式规范生成元为

$$G = \int d^3x(\pi_\mu^{(0)}\partial^\mu\varepsilon + m\pi\varepsilon + \pi_\mu^{(1)}\partial_0\partial^\mu\varepsilon) \tag{7-12-30}$$

由此生成元 G 产生的规范变换为

$$\left.\begin{aligned}&\delta B^{\mu}=\{B^{\mu},G\}=\partial^{\mu}\varepsilon,\ \delta B^{\mu}_{(1)}=\partial_{0}\partial^{\mu}\varepsilon\\&\delta\eta=m\varepsilon,\ \delta\pi^{(0)}_{\mu}=\delta\pi^{(1)}_{\mu}=\delta\pi=0\end{aligned}\right\}\tag{7-12-31}$$

在(7-12-31)式变换下，Lagrange 量(7-12-22a)式是不变的.

下面考虑矢量场 B^{μ} 与外源 $j_{\mu}=(\rho,\boldsymbol{j})$ 耦合的情况. 系统的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{0}+B^{\mu}j_{\mu}\tag{7-12-32}$$

在 (7-12-31) 式变换下，(7-12-32) 式是非不变的. 此时，正则形式的广义 Noether 恒等式(7-10-26)式可化为

$$\partial^{\mu}\left(\dot{\pi}^{(0)}_{\mu}+\frac{\delta H}{\delta B^{\mu}}\right)-\partial_{0}\partial^{\mu}\left(\dot{\pi}^{(1)}_{\mu}+\frac{\delta H}{\delta B^{\mu}_{(1)}}\right)-m\left(\dot{\pi}+\frac{\delta H}{\delta\eta}\right)=-\partial^{\mu}j_{\mu}\tag{7-12-33}$$

式中 $H=\int d^{3}x(\mathscr{H}_{c}-B^{\mu}j_{\mu})$. 此系统的总 Hamilton 量

$$H_{T}=\int d^{3}x(\mathscr{H}_{c}-B^{\mu}j_{\mu}+\lambda\Phi^{0})\tag{7-12-34}$$

系统的运动方程(7-12-4)式由总 Hamilton 导出. 沿着约束系统运动的轨线，由(7-12-4)、(7-12-33)～(7-12-34)式得守恒律

$$\partial^{\mu}j_{\mu}=0\tag{7-12-35}$$

如果系统的运动方程由扩展 Hamilton 量

$$H_{E}=\int d^{3}x[\mathscr{H}_{c}-B^{\mu}j_{\mu}+\lambda\Phi^{0}+\mu_{1}\Phi^{1}+\mu_{2}(\Phi^{2}-\rho)]\tag{7-12-36}$$

导出，其中 Φ^{1}和 Φ^{2}分别由(7-12-28)、(7-12-29)式给出，$\mu_{1}(x)$和 $\mu_{2}(x)$为 Lagrange 乘子. 沿着约束系统运动的轨线，正则形式广义 Noether 恒等式仍导致(7-12-35)式. 可见，守恒律 $\partial^{\mu}j_{\mu}=0$成立与 Dirac 猜想是否有效无关.

2. Bopp-Podolsky 广义电动力学

含高阶微商的 Bopp-Podolsky 广义电动力学的 Lagrange 量

密度[20]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{c}{4}\partial^{\sigma}F_{\mu\nu}\partial_{\sigma}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}[\mathrm{i}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - \mathrm{i}eA_{\mu}) - m]\psi \tag{7-12-37}$$

式中

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \tag{7-12-38}$$

场量 $A^{\mu}_{(0)}=A^{\mu}$、$A^{\mu}_{(1)}=\dot{A}^{\mu}$ 和 ψ 的正则共轭动量分别记为 $\pi^{(0)}_{\mu}=\pi_{\mu}$、$\pi^{(1)}_{\mu}$ 和 π_{ψ},它们分别为

$$\pi^{(1)}_{0} = 0 \tag{7-12-39a}$$

$$\pi^{(1)}_{i} = c\partial^{0}F_{0i} \tag{7-12-39b}$$

$$\pi_{0} = c\partial^{0}\partial^{i}F_{0i} \tag{7-12-39c}$$

$$\pi_{i} = c(\nabla^{2}F_{0i} + \partial_{0}\partial^{j}F_{ji}) + F_{0i} - \partial_{0}\pi^{(1)}_{i} \tag{7-12-39d}$$

$$\pi_{\psi} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{0} \tag{7-12-40}$$

系统的正则 Hamilton 量

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}^{3}x\mathscr{H}_{\mathrm{c}} = & \\ \int \mathrm{d}^{3}x\Big[& \frac{1}{2c}(\pi^{(1)}_{i})^{2} + \pi^{(1)}_{i}A^{0}_{(1)} + \frac{c}{4}\partial_{0}F_{ij}\partial^{0}F^{ij} + \\ & \frac{c}{2}\partial_{i}F_{0j}\partial^{i}F^{0j} + \frac{c}{4}\partial_{k}F_{ij}\partial^{k}F^{ij} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ & \pi^{\mu}A^{\mu}_{(1)} + \frac{1}{2}\pi_{\psi}\gamma^{0}\gamma^{j}(\partial_{j}\psi) - \frac{1}{2}(\partial_{j}\pi_{\psi})\gamma^{0}\gamma^{j}\psi - \\ & \mathrm{i}e\pi_{\psi}\gamma^{0}\gamma^{j}\psi A_{j} - \mathrm{i}m\pi_{\psi}\gamma^{0}\psi - \\ & A^{0}(\partial^{i}\pi_{i} - \mathrm{i}e\pi_{\psi}\psi)\Big] \end{aligned} \tag{7-12-41}$$

初级约束

$$\Phi^{0} = \pi^{(1)}_{0} \approx 0 \tag{7-12-42}$$

总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}} = \int \mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}} + \lambda\pi^{(1)}_{0}) \tag{7-12-43}$$

式中 $\lambda(x)$ 为 Lagrange 乘子. 由约束的自洽性条件给出次级约束

$$\Phi^1 = \{\Phi^0, H_T\} = -\pi_0 - \partial^i \pi_i^{(1)} \approx 0 \tag{7-12-44}$$

$$\Phi^2 = \{\Phi^1, H_T\} = \partial^i \pi_i - ie\pi_\psi \psi \approx 0 \tag{7-12-45}$$

所有的约束 Φ^0、Φ^1、Φ^2 均属于第一类约束. 由(7-12-11)、(7-12-15)～(7-12-17)式,此时规范生成元

$$G = \int d^3x [\pi_\mu \partial^\mu \varepsilon + \pi_\mu^{(1)} \partial_0 \partial^\mu \varepsilon + ie\pi_\psi \psi \varepsilon] \tag{7-12-46}$$

由 G 产生的规范变换为

$$\delta A^\mu = \{A^\mu, G\} = \partial^\mu \varepsilon \tag{7-12-47a}$$

$$\delta A^\mu_{(1)} = \{A^\mu_{(1)}, G\} = \partial_0 \partial^\mu \varepsilon \tag{7-12-47b}$$

$$\delta \psi = \{\psi, G\} = ie\varepsilon\psi \tag{7-12-47c}$$

$$\delta \pi_\mu = \delta \pi_\mu^{(1)} = 0 \tag{7-12-47d}$$

$$\delta \pi_\psi = \{\pi_\psi, G\} = -ie\varepsilon\pi_\psi \tag{7-12-47e}$$

3. 高阶微商杨-Mills 场

高阶微商杨-Mills 场的 Liagrange 量密度[19]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \kappa D_\rho F_{\mu\nu} D^\rho F^{\mu\nu} \tag{7-12-48}$$

式中 $A_\mu = A_\mu^a T^a$,其中 T^a 为非 Abel 规范群的生成元,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{7-12-49}$$

$$D_\mu B = \partial_\mu B + [A_\mu, B] \tag{7-12-50}$$

相应于 A^μ 和 $\dot{A}^\mu \equiv A^\mu_{(1)}$ 的正则动量记为 $\pi_\mu \equiv \pi_\mu^{(0)}$ 和 $\pi_\mu^{(1)}$,由 Ostrogradsky 变换(7-10-2)式有

$$\pi_0^{(1)} = 0 \tag{7-12-51}$$

$$\pi_i^{(1)} = 4\kappa D_0 F_{0i} \tag{7-12-52}$$

$$\pi_0 = 4\kappa D^i D_0 F_{0i} \tag{7-12-53}$$

$$\pi_i = 4\kappa (D^j D_j F_{0i} + D^j D_0 F_{ji}) - D_0 \pi_i^{(1)} + F_{0i} \tag{7-12-54}$$

正则 Hamilton 量密度

$$H_c = \frac{1}{8\kappa}(\pi_i^{(1)})^2 + \pi_i^{(1)}\{D_i A_{(1)}^0 + [A^0, A_{(1)}^i] + [F_{0i}, A^0]\} + \kappa D_0 F_{ij} D^0 F^{ij} + 2\kappa D_i F_{0j} D^i F^{0j} + \kappa D_i F_{jk} D^i F^{jk} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \pi_\mu A_{(1)}^\mu \tag{7-12-55}$$

约束为

$$\Phi^0 = \pi_0^{(1)} \approx 0 \tag{7-12-56}$$

$$\Phi^1 = -\pi_0 - D^i \pi_i^{(1)} \approx 0 \tag{7-12-57}$$

$$\Phi^2 = -D^i \pi_i + D^i [A^0, \pi_i^{(1)}] + [F^{0i}, \pi^i] \approx 0 \tag{7-12-58}$$

$$\Phi^3 = [\Phi^2, A^0] \approx 0 \tag{7-12-59}$$

所有约束 $\Phi^n \approx 0 (n=0,1,2,3)$ 均是第一类约束.

规范变换的生成元

$$G = \int d^3x (\pi_\mu D^\mu \varepsilon + \pi_\mu^{(1)} \partial_0 D^\mu \varepsilon) \tag{7-12-60}$$

G 满足(7-12-19)、(7-12-21)式,由 G 产生的规范变换为

$$\delta A^\mu = D^\mu \varepsilon \tag{7-12-61a}$$

$$\delta A_{(1)}^\mu = \partial_0 D^\mu \varepsilon \tag{7-12-61b}$$

$$\delta \pi_\mu = -[\varepsilon, \pi_\mu] - [\dot{\varepsilon}, \pi_\mu^{(1)}] \tag{7-12-61c}$$

$$\delta \pi_\mu^{(1)} = -[\varepsilon, \pi_\mu^{(1)}] \tag{7-12-61d}$$

在(7-12-61)式变换下,Lagrange 量不变,即

$$\delta \mathscr{L} = 0 \tag{7-12-62}$$

§ 7-13 高阶微商系统 Green 函数的生成泛函 正则 Ward 恒等式

现在开始讨论高阶微商系统的量子理论,通过路径积分量子化,阐明高阶微商系统的量子对称性质.

高阶微商正规 Lagrange 量系统的路径积分形式首先是在文献[51]中讨论的.下面给出高阶微商系统Green 函数的生成泛函.对正规 Lagrange 量 $L(q^i,q^i_{(1)},\cdots)$ 描述的系统,在相空间描述时,其正则形式不含约束,有限自由度高阶微商正规 Lagrange 量系统相空间中 Green 函数的生成泛函[52]

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}q^i_{(s)}\,\mathscr{D}p^{(s)}_i\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t(p^{(s)}_i\dot{q}^i_{(s)}-H_c+J^{(s)}_iq^i_{(s)}+K^i_{(s)}p^{(s)}_i)\right\}\tag{7-13-1}$$

式中:H_c 为正则 Hamilton 量;$J^{(s)}_i$ 和 $K^i_{(s)}$分别对应于 $q^i_{(s)}$和 $p^{(s)}_i$ 的外源.

对于高阶微商奇异 Lagrange 量系统,在相空间描述时其正则变量间存在约束.与通常一阶微商系统情形类似,按 Dirac-Bergmann 求约束的算法可以得到系统所含的所有约束.全部约束可分为第一类约束和第二类约束.在路径积分量子化中,对含第一类约束的系统,相应于每一个第一类约束,需选取一规范条件,使所有约束(包括规范条件)均变为第二类约束.有限自由度高阶微商奇异 Lagrange 量系统在相空间中 Green 函数的生成泛函[52]

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}q^i_{(s)}\,\mathscr{D}p^{(s)}_i[\det|\{\Phi,\Phi\}|]^{1/2}\delta(\Phi)\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}t(J^{(s)}_iq^i_{(s)}+K^i_{(s)}p^{(s)}_i)\right]\right\}\tag{7-13-2}$$

式中

$$I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}t(p^{(s)}_iq^i_{(s+1)}-H_c)\tag{7-13-3}$$

H_c 为正则 Hamilton 量;Φ 为所有约束的总体(对第二类约束系统)或所有约束和规范条件的总体(对第一类约束系统);$\{\cdot,\cdot\}$代表广义 Poisson 括号.

一般情形,很难作出相空间路径积分(7-13-1)式或(7-13-2)式

对动量 $p_i^{(s)}$ 的积分,或者根本无法作出该积分,即是说不能将其化为位形空间中的路径积分形式,此时就不能简单地用位形空间中的 Lagrange 量(或有效 Lagrange 量)表示 Green 函数的生成泛函,也不能导致位形空间的 Ward 恒等式. Ward 恒等式在量子场论中占重要地位,它是理论可重整化的根据,并且在实际计算中,可将高阶顶角的计算化为低阶顶角的计算. 前面对一阶微商 Lagrange量系统,讨论了相空间中的定域对称性,建立了正则形式的 Ward 恒等式. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本. 下面将首先研究高阶微商场论中奇异 Lagrange 量系统的定域对称性质,建立系统的正则形式的 Ward 恒等式[53~55],并给出它的应用,然后再研究系统的整体对称性,给出量子守恒律等[56].

设 $\phi^a(x)(a=1,2,\cdots,n)$ 为场变量,场的运动由含高阶微商的 Lagrange 量

$$L[\phi^a_{(0)},\phi^a_{(1)},\cdots,\phi^a_{(N)}]=\int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\phi^a,\phi^a_{,(\mu)},\cdots,\phi^a_{,\mu(N)}) \tag{7-13-4}$$

来描述. 用奇异 Lagrange 量描述的系统,其广义 Hess 矩阵 $[H_{ab}]$ 退化,

$$\det|H_{ab}|=\det\left|\frac{\delta L}{\delta\phi^a_{(N)}\delta\phi^b_{(N)}}\right|=0$$

此时正则变量 $\phi^a_{(s)}$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 之间存在约束. 高阶微商奇异 Lagrange 量系统在相空间中 Green 函数的生成泛函

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^a_{(s)}\,\mathscr{D}\pi_a^{(s)}\,\delta(\Phi_k)\,\sqrt{\det|\{\Phi_l,\Phi_m\}|}\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J_a^{(s)}\phi^a_{(s)}+K^a_{(s)}\pi_a^{(s)})\right\} \tag{7-13-5}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi_a^{(s)}\phi^a_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}} \tag{7-13-6}$$

其中 $\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为系统的正则 Hamilton 量. 对含第二类约束的系统,

$\{\Phi_k\}$为所有第二类约束；对含第一类约束的系统，$\{\Phi_k\}$包括所有第一类约束和规范条件；$\{\cdot,\cdot\}$代表场的广义 Poisson 括号；$J_a^{(s)}$ 和 $K_{(s)}^a$分别为 $\phi_{(s)}^a$和 $\pi_a^{(s)}$ 的外源.

利用 Grassmann 变量 $C(x)$ 和 $\overline{C}(x)$ 的积分性质，有

$$\det|\{\Phi_l(x),\Phi_m(y)\}| = \int \mathscr{D}C_m(y)\,\mathscr{D}\overline{C}_l(x)\cdot \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\overline{C}_l(x)\{\Phi_l(x),\Phi_m(y)\}C_m(y)\right] \quad (7\text{-}13\text{-}7)$$

由(7-13-7)式和 δ-函数的性质，可将(7-13-5)式写为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\phi_{(s)}^a\,\mathscr{D}\pi_a^{(s)}\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\overline{C}\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_a^{(s)}\phi_{(s)}^a + K_{(s)}^a\pi_a^{(s)})\right\} \quad (7\text{-}13\text{-}8\text{a})$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \lambda_k\Phi_k + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4y\overline{C}_l(x)\{\Phi_l(x),\Phi_m(y)\}C_m(y) \quad (7\text{-}13\text{-}8\text{b})$$

其中 $\lambda_k(x)$ 为 Lagrange 乘子.

对 λ、C、$\overline{C}$ 也引入外源，并记 $\phi_{(s)}^a = (\phi_{(s)}^a,\lambda_m,\overline{C}_l,C_m)$，$J_a^{(s)} = (J_a^{(s)},\zeta_k,\overline{\xi}_l,\xi_m)$. 其中，$\zeta_k$、$\overline{\xi}_l$、$\xi_m$ 分别为 λ_k、$\overline{C}_l$、C_m 对应的外源. 于是(7-13-8a)式又可写为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\phi_{(s)}^a\mathscr{D}\pi_a^{(s)}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_a^{(s)}\phi_{(s)}^a + K_{(s)}^a\pi_a^{(s)})\right\} \quad (7\text{-}13\text{-}9)$$

现考虑增广相空间中的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + R_\sigma^\mu\,\varepsilon^\sigma(x) \\ \phi_{(s)}^{a\prime}(x') &= \phi_{(s)}^a(x) + \Delta\phi_{(s)}^a(x) = \phi_{(s)}^a(x) + S_{(s)\sigma}^a\,\varepsilon^\sigma(x) \\ \pi_a^{(s)\prime}(x') &= \pi_a^{(s)}(x) + \Delta\pi_a^{(s)}(x) = \pi_a^{(s)}(x) + T_{a\sigma}^{(s)}\,\varepsilon^\sigma(x) \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}13\text{-}10)$$

式中 $\epsilon^{\sigma}(x)$ $(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意函数，它们和它们的各级微商在四维时空区域的边界上为0；R^{μ}_{σ}、$S^{a}_{(s)\sigma}$、$T^{(s)}_{a\sigma}$为线性微分算符. 在(7-13-10)式变换下，有

$$\Delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} = \Delta\int \mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}\,\mathrm{d}^4x = \int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^{a}_{(s)}}\delta\phi^{a}_{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}_{a}}\delta\pi^{(s)}_{a} + \partial_{\mu}[(\pi^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s+1)} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^{\mu}] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_{a}\delta\phi^{a}_{(s)})\right\} \tag{7-13-11}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \delta\phi^{a}_{(s)} &= \Delta\phi^{a}_{(s)} - \phi^{a}_{(s),\mu}\Delta x^{\mu} \\ \delta\pi^{(s)}_{a} &= \Delta\pi^{(s)}_{a} - \pi^{(s)}_{a,\mu}\Delta x^{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{7-13-12}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^{a}_{(s)}} = -\dot{\pi}^{(s)}_{a} - \frac{\delta H_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^{a}_{(s)}},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}_{a}} = \dot{\phi}^{a}_{(s)} - \frac{\delta H_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}_{a}} \tag{7-13-13}$$

H_{eff}为$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$相应的 Hamilton 量. 设(7-13-10)式变换的 Jacobi 行列式为 $\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]$，在(7-13-10)式变换下，生成泛函(7-13-9)式是不变的，表明 $\delta Z/\delta\epsilon^{\sigma}=0$，于是由(7-13-9)、(7-13-11)式得到正则形式的广义 Ward 恒等式

$$\Big[J^{0}_{\sigma} + \tilde{S}^{a}_{(s)\sigma}\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^{a}_{(s)}}\Big) - \tilde{R}^{\mu}_{\sigma}\Big(\phi^{a}_{(s),\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^{a}_{(s)}}\Big) + \tilde{S}^{a}_{(s)\sigma}J^{(s)}_{a} - \tilde{R}^{\mu}_{\sigma}(\phi^{a}_{(s),\mu}J^{(s)}_{a}) + \tilde{T}^{(s)}_{a\sigma}\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}_{a}}\Big) - \tilde{R}^{\mu}_{\sigma}\Big(\pi^{(s)}_{a,\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}_{a}}\Big) + \tilde{T}^{(s)}_{a\sigma}K^{a}_{(s)} - \tilde{R}^{\mu}_{\sigma}(\pi^{(s)}_{a,\mu}K^{a}_{(s)})\Big]_{\substack{\phi^{a}_{(s)}\to -\mathrm{i}\delta/\delta J^{(s)}_{a} \\ \pi^{(s)}_{a}\to -\mathrm{i}\delta/\delta K^{a}_{(s)}}} Z[J,K] = 0 \tag{7-13-14a}$$

式中

$$J_\sigma^0 = -\mathrm{i}\,\frac{\delta \bar{J}\,[\phi\,,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^\sigma}\Big|_{\varepsilon^\sigma=0} \qquad (7\text{-}13\text{-}14\text{b})$$

$\tilde{R}^\mu_\sigma$、$\tilde{S}^a_{(s)\sigma}$、$\tilde{T}^{(s)}_{a\sigma}$分别为 R^μ_σ、$S^a_{(s)\sigma}$、$T^{(s)}_{a\sigma}$的伴随算符[47]. 在导出(7-13-14)式时,用了关系式 $\bar{J}\,[\phi,\pi,0]=1$,将(7-13-14)式对外源多次求泛函微商,然后让外源等于0,从而可得到多种形式的广义正则 Ward 恒等式.

例如:考虑相空间中的无穷小平移变换

$$\left.\begin{aligned} \phi^{a\prime}_{(s)}(x) &= \phi^a_{(s)}(x) + \varepsilon^a_{(s)1}(x) \\ \pi^{(s)\prime}_a(x) &= \pi^{(s)}_a(x) + \varepsilon^{(s)}_{a2}(x) \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}13\text{-}15)$$

此变换的 Jacobi 行列式为1. 在(7-13-15)式变换下,生成泛函(7-13-9)式是不变的,从而分别有

$$\int \mathscr{D}\phi^a_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^a_{(s)}} + J^{(s)}_a\right)\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}I^p_{\mathrm{eff}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(J^{(s)}_a\phi^a_{(s)} + K^a_{(s)}\pi^{(s)}_a)\right\} = 0 \quad (7\text{-}13\text{-}16\text{a})$$

$$\int \mathscr{D}\phi^a_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\left(\frac{\delta I^p_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}_a} + K^a_{(s)}\right)\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(J^{(s)}_a\phi^a_{(s)} + K^a_{(s)}\pi^{(s)}_a)\right\} = 0 \quad (7\text{-}13\text{-}16\text{b})$$

让 $J^{(s)}_a = K^a_{(s)} = 0$,由(7-13-16)式得

$$\langle 0|T^*\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi^a_{(s)}}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}_a}|0\rangle = 0 \quad (7\text{-}13\text{-}17)$$

式中 T^* 为一种特殊的编时乘积[57,58]. 对(7-13-16a)式关于 $J^{(s)}_a$ 求 n 次泛函微商,然后让

$$t_1, t_2, \cdots, t_m \to \infty; \quad t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \to -\infty$$

得
$$\langle \mathrm{out}, m|\,\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^a_{(s)}}|n-m, \mathrm{in}\rangle = 0 \qquad (7\text{-}13\text{-}18)$$

由于 m 和 n 是任意的,由(7-13-18)式得

$$\dot{\pi}_a^{(s)}(x) = -\frac{\delta H_{\text{eff}}}{\delta \phi_{(s)}^{a}(x)} \qquad (7\text{-}13\text{-}19a)$$

类似地，由(7-13-16b)式可得

$$\dot{\phi}_{(s)}^{a} = \frac{\delta H_{\text{eff}}}{\delta \pi_a^{(s)}(x)} \qquad (7\text{-}13\text{-}19b)$$

(7-13-19)式为广义约束 Hamilton 系统的量子广义正则方程.

在约束 Hamilton 的经典理论中，Dirac 曾猜想所有第一类约束均是规范变换的生成元. 长期以来对这猜想的有效性一直存在着争议，高阶微商理论也有类似的问题. 如果 Dirac 猜想成立，系统的经典正则方程应该由扩展 Hamilton 量 H_E 导出，H_E 包含了所有第一类(初级和次级)约束. 而在广义约束 Hamilton 的量子理论中，其广义正则方程应由(7-13-19)式给出，H_{eff}中不仅包含了所有约束(可以是第二类约束)，而且还包含了规范条件，这与经典理论是完全不同的. 在量子理论中，最基本的是生成泛函，而不是经典运动方程.

§7-14 高阶微商有质量规范场

有质量矢量场和标量场的二阶微商 Lagrange 量密度[55]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - c^2\partial_\lambda F^{\alpha\lambda}\partial_\rho F_\alpha^\rho + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi - mB_\mu)(\partial^\mu\varphi - mB^\mu) \qquad (7\text{-}14\text{-}1a)$$

式中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \qquad (7\text{-}14\text{-}1b)$$

c 和 m 均为常数. 由(7-14-1)式导出的 Euler-Lagrange 方程为

$$(1-2c^2\Box)\Box B_\mu - \partial_\mu[(1-2c^2\Box)\partial^\nu B_\nu] - m^2B_\mu + m\partial_\mu\varphi = 0 \qquad (7\text{-}14\text{-}2)$$

场 $\varphi(x)$、$B^\mu(x)=B^\mu_{(0)}(x)$ 和 $\dot{B}^\mu(x)=B^\mu_{(1)}(x)$ 的正则动量分别为

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)}=-mB^0(x)+\dot{\varphi}(x) \qquad (7\text{-}14\text{-}3)$$

$$\pi_\mu=-F_{0\mu}-2c^2(\partial_k\partial_\lambda F^{0\lambda}\delta^k_\mu-\partial_0\partial_\lambda F^\lambda_\mu) \qquad (7\text{-}14\text{-}4)$$

$$\pi^{(1)}_\mu=2c^2(\partial_\lambda F^{0\lambda}\delta^0_\mu-\partial_\lambda F^\lambda_\mu) \qquad (7\text{-}14\text{-}5)$$

正则 Hamilton 量

$$\begin{aligned}H_c=&\int d^3x\mathscr{H}_c=\int d^3x\Big[\pi_\mu B^\mu_{(1)}-\frac{1}{4c^2}(\pi^{(1)}_i)^2+\\&\pi^{(1)}_i\partial_kF^{ik}+\pi^{(1)}_i\partial^iB^0_{(1)}+\frac{1}{2}(B_{(1)i}-\partial_iB_0)^2-\\&c^2(\partial_iB^i_{(1)}-\partial_i\partial^iB_0)(\partial_kB^k_{(1)}-\partial_k\partial^kB_0)+\\&\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}+\frac{1}{2}m^2B_iB^i+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi-\\&mB_i\partial^i\varphi-(\partial^i\pi_i+m\pi)B^0\Big]\end{aligned} \qquad (7\text{-}14\text{-}6)$$

初级约束

$$\Phi^0=\pi^{(1)}_0\approx 0 \qquad (7\text{-}14\text{-}7)$$

由约束的自洽性条件，得次级约束

$$\Phi^1=\{\Phi^0,H_T\}=\partial^i\pi^{(1)}_i-\pi_0\approx 0 \qquad (7\text{-}14\text{-}8)$$

$$\Phi^2=\{\Phi^1,H_T\}=\partial^i\pi_i+m\pi\approx 0 \qquad (7\text{-}14\text{-}9)$$

所有约束 $\Phi^k(k=0,1,2)$ 均为第一类约束. 由它们构成的规范变换生成元

$$\begin{aligned}G=&\int d^3x[\pi_\mu\partial^\mu\varepsilon(x)+m\pi\varepsilon(x)+\\&\pi^{(1)}_\mu\partial_0\partial^\mu\varepsilon(x)]\end{aligned} \qquad (7\text{-}14\text{-}10)$$

由 G 导致的规范变换为

$$\left.\begin{array}{l}\delta B^{\mu}=\{B^{\mu},G\}=\partial^{\mu}\varepsilon(x),\quad \delta B^{\mu}_{(1)}=\partial_{0}\partial^{\mu}\varepsilon(x)\\ \delta\varphi=m\varepsilon(x),\quad \delta\pi=\delta\pi_{\mu}=\delta\pi^{(1)}_{\mu}=0\end{array}\right\}\tag{7-14-11}$$

在这个规范变换下,系统的 Lagrange 量是不变的.

采用路径积分量子化,对第一类约束需选取相应的规范条件.由(7-14-2)式的0分量有

$$B_{0}=[(1-2c^{2}\Box)\nabla^{2}+m^{2}]^{-1}\cdot \partial_{0}[(1-2c^{2}\Box)\nabla\cdot\boldsymbol{B}-m\varphi]\tag{7-14-12}$$

取广义 Coulomb 规范条件

$$(1-2c^{2}\Box)\nabla\cdot\boldsymbol{B}-m\varphi=0\tag{7-14-13}$$

条件(7-14-13)式随时间的稳定性,相应于 $B_{0}(x)=0$;对$B_{0}(x)$的稳定性要求,有 $\dot{B}_{0}(x)=0$. 因此,有如下3个规范条件:

$$\Omega_{1}=B^{0}_{(1)}\approx 0\tag{7-14-14}$$

$$\Omega_{2}=(1-2c^{2}\Box)\nabla\cdot\boldsymbol{B}-m\varphi\approx 0\tag{7-14-15}$$

$$\Omega_{3}=B^{0}\approx 0\tag{7-14-16}$$

全部约束和规范条件一起记为 $\Phi=(\Phi^{k}(k=0,1,2),\Omega_{i}(i=1,2,3))$,它们成为了第二类约束,且有如下广义 Poisson 括号:

$$\{\Omega_{1}(x),\Phi^{1}(y)\}=\delta^{(3)}(x-y)\tag{7-14-17}$$

$$\{\Omega_{2}(x),\Phi^{2}(y)\}=[(1-2c^{2}\nabla^{2})\nabla^{2}-m]\delta^{(3)}(x-y)\tag{7-14-18}$$

$$\{\Omega_{3}(x),\Phi^{0}(y)\}=\delta^{(3)}(x-y)\tag{7-14-19}$$

由此可见,$\det|\{\Phi_{l},\Phi_{m}\}|$与场量无关. 这个行列式可从生成泛函中略去.

由奇异 Lagrange 量(7-14-1)式描述的系统,其 Green 函数的生成泛函

$$Z[J_{\mu},J,\xi^{k},\xi_{m}]=\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}B^{\mu}\mathscr{D}B^{\mu}_{(1)}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\pi_{\mu}\mathscr{D}\pi^{(1)}_{\mu}\mathscr{D}\lambda_{k}\mathscr{D}\mu^{m}\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} + J_\mu B^\mu +\right.$$

$$\left. J\varphi + \xi^k\lambda_k + \xi_m\mu^m)\right\} \qquad (7\text{-}14\text{-}20)$$

这里仅对场量(包括乘子场)B^μ、φ、λ_k、μ^m 引入了外源 J_μ、J、ξ^k、ξ_m，而

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} = \pi_\mu \dot{B}^\mu + \pi^{(1)}_\mu \dot{B}^\mu_{(1)} + \pi\dot{\varphi} -$$

$$\mathscr{H}_c + \lambda_k\Phi^k + \mu^m\Omega_m \qquad (7\text{-}14\text{-}21)$$

系统的正则作用量和生成泛函(7-14-20)式在(7-14-11)式变换下是不变的，变换(7-14-11)式的 Jacobi 行列式为1. 此时正则形式的广义 Ward 恒等式(7-13-14a)式，成为

$$\Big[-\partial_0\frac{\delta}{\delta\xi_1} + [\nabla^2(1-2c^2\Box) - m^2]\frac{\delta}{\delta\xi_2} - \partial_0\frac{\delta}{\delta\xi_3} -$$

$$\partial^\mu J_\mu + mJ\Big]Z[J_\mu,J,\xi^k,\xi_m] = 0 \qquad (7\text{-}14\text{-}22)$$

令 $Z[J_\mu,J,\xi^k,\xi_m]=\exp\{\mathrm{i}W[J_\mu,J,\xi^k,\xi_m]\}$，并由泛函 Legendre 变换引入正规顶角的生成泛函，

$$\Gamma[B^\mu,\varphi,\lambda,\mu] = W[J_\mu,J,\xi^k,\xi_m] -$$

$$\int \mathrm{d}^4x(J_\mu B^\mu + J\varphi + \xi^k\lambda_k + \xi_m\mu^m) \qquad (7\text{-}14\text{-}23)$$

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} = B^\mu(x),\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta B^\mu(x)} = -J_\mu(x) \quad (7\text{-}14\text{-}24\mathrm{a})$$

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \varphi(x),\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = -J(x) \quad (7\text{-}14\text{-}24\mathrm{b})$$

$$\frac{\delta W}{\delta\xi^k(x)} = \lambda_k(x),\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda_k(x)} = -\xi^k(x) \quad (7\text{-}14\text{-}24\mathrm{c})$$

$$\frac{\delta W}{\delta\xi_m(x)} = \mu^m(x),\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\mu^m(x)} = -\xi_m(x) \quad (7\text{-}14\text{-}24\mathrm{d})$$

由此 Ward 恒等式(7-14-22)式化为

$$\partial_0\mu_1(x) - \nabla^2(1-2c^2\Box - m^2)\mu_2 + \partial_0\mu_3(x) +$$

$$\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta B_\mu(x)} - m\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = 0 \qquad (7\text{-}14\text{-}25)$$

将(7-14-25)式分别对 $\varphi(x_2)$ 或 $B^\nu(x_2)$ 求泛函微商，然后让所有场(包括乘子场)为0，即让 $B_\mu=\varphi=\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，分别得

$$\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} = \frac{1}{m}\partial^\mu_{x_1}\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta B^\mu(x_1)\delta\varphi(x_2)} \qquad (7\text{-}14\text{-}26)$$

$$\partial^\mu_{x_1}\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta B^\mu(x_1)\delta B^\nu(x_2)} = m\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta B^\nu(x_2)} \qquad (7\text{-}14\text{-}27)$$

(7-14-26)、(7-14-27)式分别给出了 $\varphi(x)$ 场和 $B^\mu(x)$ 场传播子所适合的关系式.

将(7-14-25)式分别关于 $B^\nu(x_2)$和 $\varphi(x_3)$求泛函微商，然后让所有场为0，得

$$\partial^\mu_{x_1}\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta B^\mu(x_1)\delta B^\nu(x_2)\delta\varphi(x_3)} = m\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta B^\nu(x_2)\delta\varphi(x_3)} \qquad (7\text{-}14\text{-}28)$$

(7-14-28)式给出了场的3点正规顶角应适合的关系式. 将(7-14-25)式对场多次求泛函微商，可得正规顶角间更多的关系.

由正则形式广义 Ward 恒等式导出正规顶角间的关系，其突出优点是，对相空间中生成泛函可以不事先作出对正则动量的路径积分.

当 $\det|\{\Phi_l,\Phi_m\}|$ 与场量有关时，这时只需寻找保持 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 不变的定域或非定域变换，在该变换下由正则广义 Ward 恒等式，仍可导致正规顶角所适合的关系.

§ 7-15　广义 QCD 中规范场-鬼场正规顶角

广义 QCD 的 Lagrange 量密度[52]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4\kappa^2}\mathrm{D}^a_{b\mu}G^b_{\lambda\nu}\mathrm{D}^{a\mu}_c G^{c\lambda\nu} +$$

$$\mathrm{i}\bar{\psi}^{\alpha}\gamma^{\mu}\nabla^{\alpha}_{\beta\mu}\psi^{\beta} - m\bar{\psi}^{\alpha}\psi^{\alpha} \tag{7-15-1}$$

式中

$$G^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}B^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}B^{a}_{\mu} + f^{a}_{bc}B^{b}_{\mu}B^{c}_{\nu} \tag{7-15-2}$$

$$\mathrm{D}^{a}_{b\mu} = \delta^{a}_{b}\partial_{\mu} + f^{a}_{cb}B^{c}_{\mu} \tag{7-15-3}$$

$$\nabla^{\alpha}_{\beta\mu} = \delta^{\alpha}_{\beta}\partial_{\mu} - \mathrm{i}(T_{a})^{\alpha}_{\beta}B^{a}_{\mu} \tag{7-15-4}$$

其中 $T_a = \lambda_a/2$，λ_a 为 Gell-Mann 矩阵. Lagrange 量(7-15-1)式在下列规范变换下是不变的：

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi^{\alpha} &= -\mathrm{i}\varepsilon^{a}(x)(T_{a})^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta} \\ \delta A^{a}_{\mu} &= \mathrm{D}^{a}_{b\mu}\varepsilon^{b}(x) \end{aligned}\right\} \tag{7-15-5}$$

广义 QCD 的 Lagrange 量是奇异的，系统在相空间存在固有约束. 设 $\pi_{a\mu}$、$\pi^{(1)}_{a\mu}$、π_{ψ}、$\pi_{\bar{\psi}}$分别代表与 $B^{a\mu}$、$B^{ai}_{(1)} = \dot{B}^{ai}$、$\psi$、$\bar{\psi}$ 相应的正则共轭动量. 系统所含的约束为[52]

$$\Phi^{(1)}_{a1} = \pi_{a0} + \mathrm{D}^{a}_{bi}\pi^{(1)}_{ib} \approx 0 \tag{7-15-6}$$

$$\Phi^{(1)}_{2} = \pi_{\psi} - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{0} \approx 0 \tag{7-15-7}$$

$$\Phi^{(1)}_{3} = \pi_{\bar{\psi}} \approx 0 \tag{7-15-8}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}_{a} = {} & \mathrm{D}^{a}_{bi}\pi_{bi} - \bar{\psi}^{\alpha}\gamma_{0}(T_{a})^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta} - [\Phi^{(1)}_{2\alpha}(T_{a})^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta} + \\ & \Phi^{(1)}_{3\alpha}(\tilde{T}_{a})^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta}] - f^{a}_{bc}(B^{bi}_{(1)}\pi^{(1)}_{ci} + \pi_{c0}B^{b0}) \end{aligned} \tag{7-15-9a}$$

而

$$(\tilde{T}_{a})^{\alpha}_{\beta} = -\gamma^{0}(T_{a})^{\alpha}_{\beta}\gamma^{0} \tag{7-15-9b}$$

$\Phi^{(1)}_{a1}$和 $\Phi^{(2)}_{a}$ 为第一类约束，$\Phi^{(1)}_{2}$和 $\Phi^{(1)}_{3}$为第二类约束. 采用路径积分量子化，正则规范条件取为

$$\Phi^{G}_{a1} = \partial_{i}B^{ai} \approx 0 \tag{7-15-10}$$

$$\Phi^{G}_{a2} = \partial_{i}B^{ai}_{(1)} \approx 0 \tag{7-15-11}$$

全部约束和规范条件一起构成第二类约束. 此时 Green 函数的生成泛函

$$Z[J] = \int \mathscr{D}B\mathscr{D}B_{(1)}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\pi^{(1)}\mathscr{D}\pi_{\psi}\mathscr{D}\pi_{\bar{\psi}}\cdot$$

$$\delta(\Phi)\sqrt{\det|\{\Phi,\Phi\}|}\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J_a^\mu B_\mu^a+\bar{J}\psi+\bar{\psi}J)\right\} \tag{7-15-12}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi_{a\mu}\dot{B}^{a\mu}+\pi_{a\mu}^{(1)}\dot{B}_{(1)}^{a\mu}+\dot{\psi}\pi_\psi+\dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}} \tag{7-15-13}$$

$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$为系统的正则 Hamilton 量密度;Φ代表全部约束条件和规范条件,$\Phi=(\Phi_l,\Phi_m^G)$. 这里仅对场量引入外源. (7-15-12)式又称为"坐标"Green 函数的生成泛函[52]. 由于

$$\det|\{\Phi,\Phi\}|=\det{}^4\mathrm{D}_{bi}^a\partial_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7-15-14}$$

引入鬼场$C(x)$和$\bar{C}(x)$. 由(7-15-14)式可将(7-15-12)式写为

$$Z[J_a^\mu,\bar{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta]=$$
$$\int\mathscr{D}B\,\mathscr{D}B_{(1)}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\bar{\psi}\,\mathscr{D}\pi\,\mathscr{D}\pi^{(1)}\cdot$$
$$\mathscr{D}\pi_\psi\,\mathscr{D}\pi_{\bar{\psi}}\,\mathscr{D}\bar{C}\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}\mu\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_a^\mu B_\mu^a+\bar{J}\psi+\right.$$
$$\left.\bar{\psi}J+\bar{\xi}C+\bar{C}\xi+\eta^m\lambda_m+\zeta^n\mu_n)\right\} \tag{7-15-15}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{f}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{7-15-16}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{f}}=\lambda_1^a\Phi_{a1}^{(1)}+\lambda^2\Phi_2^{(1)}+\lambda^3\Phi_3^{(1)}+$$
$$\lambda_2^a\Phi_a^{(2)}+\mu_1^a\Phi_{a1}^G+\mu_2^a\Phi_{a2}^G \tag{7-15-17a}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=2\bar{C}_a(x)\mathrm{D}_{bi}^a\partial_iC^b(x) \tag{7-15-17b}$$

下面来寻找一变换,使$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$和$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$保持不变. 由于在

$$\left.\begin{aligned}B'^a_\mu(x)&=B_\mu^a(x)+\mathrm{D}_{\sigma\mu}^a\varepsilon^\sigma(x)\\C'^a(x)&=C^a(x)+\mathrm{i}(T_\sigma)_b^a\varepsilon^\sigma(x)C^b(x)\end{aligned}\right\} \tag{7-15-18}$$

变换下,$\mathrm{D}_{b\mu}^aC^b$变为

$$\mathrm{D}'^a_{b'\mu}C^{b'}=\mathrm{D}_{b\mu}^aC^b+\mathrm{i}(T_\sigma)_b^a\varepsilon^\sigma(x)\mathrm{D}_{e\mu}^bC^e \tag{7-15-19}$$

因此,如果设$\bar{C}^a(x)$做下列变换:

$$\partial^{\mu}\overline{C}^{a\prime} = \partial^{\mu}\overline{C}^{a} - \mathrm{i}\overline{C}^{b}(T_{\sigma})^{b}_{a}\varepsilon^{\sigma}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}20)$$

那么,$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$在下列变换

$$C^{a\prime}(x) = C^{a}(x) + \mathrm{i}(T_{\sigma})^{a}_{b}\varepsilon^{\sigma}(x)C^{b}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{a})$$

$$\overline{C}^{a\prime}(x) = \overline{C}^{a}(x) - \mathrm{i}\overline{C}^{b}(T_{\sigma})^{b}_{a}\varepsilon^{\sigma} + \frac{\mathrm{i}}{\Box}\partial_{\mu}[\overline{C}^{b}(T_{\sigma})^{b}_{a}\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)] \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{b})$$

$$\overline{B}^{a\prime}{}_{\mu}(x) = B^{a}_{\mu}(x) + \mathrm{D}^{a}_{\sigma\mu}\varepsilon^{\sigma}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{c})$$

$$\overline{B}^{a\prime}{}_{(1)\mu}(x) = B^{a}_{(1)\mu}(x) + \partial_{0}\mathrm{D}^{a}_{\sigma\mu}\varepsilon^{\sigma}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{d})$$

$$\pi^{\mu\prime}{}_{a}(x) = \pi^{\mu}_{a}(x) + f^{a}_{bc}\pi^{\mu}_{c}(x)\varepsilon^{b}(x) + f^{a}_{bc}\pi^{(1)\mu}_{c}(x)\dot{\varepsilon}^{b}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{e})$$

$$\pi^{(1)\mu\prime}_{a}(x) = \pi^{(1)\mu}_{a}(x) + f^{a}_{bc}\pi^{(1)\mu}_{c}(x)\varepsilon^{b}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{f})$$

$$\psi'(x) = \psi(x) - \mathrm{i}T_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x)\psi(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{g})$$

$$\overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x) + \mathrm{i}\overline{\psi}(x)T_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{h})$$

$$\pi'_{\psi}(x) = \pi_{\psi}(x) + \mathrm{i}\pi_{\psi}(x)T_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{i})$$

$$\pi'_{\overline{\psi}}(x) = \pi_{\overline{\psi}}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}21\mathrm{j})$$

下,是不变的.(7-15-21b)式又可写为

$$\overline{C}^{a\prime}(x) = \overline{C}^{a}(x) - \mathrm{i}\overline{C}^{b}(x)(T_{\sigma})^{a}_{b}\varepsilon^{\sigma}(x) + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}y\Delta_{0}(x,y)\cdot \partial_{\mu}[\overline{C}^{b}(y)(T_{\sigma})^{b}_{a}\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(y)] \qquad (7\text{-}15\text{-}22\mathrm{a})$$

式中 $\Delta_0(x-y)$适合

$$\Box\Delta_{0}(x,y) = \mathrm{i}\delta^{4}(x-y) \qquad (7\text{-}15\text{-}22\mathrm{b})$$

设将(7-15-21)式变换的 Jacobi 行列式记为 $J_{\varepsilon}[\phi,\pi,\varepsilon]$,并记

$$J^{0}_{\sigma} = -\left.\frac{\mathrm{i}\delta J_{\varepsilon}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^{\sigma}}\right|_{\varepsilon^{\sigma}(x)=0}$$

在(7-15-21)式变换下,设 $\mathscr{L}_{\mathrm{f}}$ 的变更为

$$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{f}} = F_{\sigma}(\phi,\pi,\lambda,\mu)\varepsilon_{\sigma}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}23)$$

其中 F_σ 与场的正则变量和乘子场 $\lambda_m(x)$、$\mu_m(x)$ 有关，当乘子场 $\lambda_m=\mu_m=0$ 时，$F_\sigma=0$. 生成泛函(7-15-15)式在(7-15-21)式变换下不变，此时广义 Ward 恒等式(7-13-14a)式化为

$$\Big\{J_\sigma^0 + \mathrm{i}F_\sigma - \mathrm{i}\partial_\mu J_\sigma^\mu + \mathrm{i}f_{\sigma c}^a J_a^\mu \frac{\delta}{\delta J_c^\mu} + \mathrm{i}\bar{J}T_\sigma \frac{\delta}{\delta \bar{J}} -$$

$$\mathrm{i}JT_\sigma \frac{\delta}{\delta J} + \mathrm{i}\bar{\xi}_a(T_\sigma)_b^a \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_b} - \mathrm{i}\xi_a(T_\sigma)_a^b \frac{\delta}{\delta \xi_b} +$$

$$\mathrm{i}\partial^\mu\Big[\partial_\mu\Big(\xi_a \frac{1}{\square}\Big)(T_\sigma)_a^b \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_b}\Big]\Big\}Z[J_a^\mu,\bar{J},J,\bar{\xi},\xi,\zeta,\eta] = 0$$

(7-15-24)

让 $Z[J_a^\mu,\bar{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta]=\exp\{\mathrm{i}W[J_a^\mu,\bar{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta]\}$ 并利用泛函 Legendre 变换将 $W[J_a^\mu,\bar{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta]$ 换为 $\Gamma[B_\mu^a,\psi,\bar{\psi},C,\bar{C},\lambda,\mu]$，即

$$\Gamma[B_\mu^a,\psi,\bar{\psi},C,\bar{C},\lambda,\mu] = W[J_a^\mu,\bar{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta] -$$

$$\int \mathrm{d}^4x(J_a^\mu B_\mu^a + \bar{J}\psi + \bar{\psi}J +$$

$$\bar{\xi}C + \bar{C}\xi + \eta^m\lambda_m + \zeta^n\mu_n) \qquad (7\text{-}15\text{-}25)$$

且

$$\frac{\delta W}{\delta J_a^\mu(x)} = B_\mu^a(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta B_\mu^a(x)} = - J_a^\mu(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}26\mathrm{a})$$

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \bar{\psi}(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} = - J(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}26\mathrm{b})$$

$$\frac{\delta W}{\delta \bar{J}(x)} = \psi(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} = - \bar{J}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}26\mathrm{c})$$

$$\frac{\delta W}{\delta \xi(x)} = \bar{C}(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}(x)} = - \xi(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}26\mathrm{d})$$

$$\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}(x)} = C(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta C(x)} = - \bar{\xi}(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}26\mathrm{e})$$

$$\frac{\delta W}{\delta \eta^m(x)} = \lambda_m(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \lambda_m(x)} = - \eta^m(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}26\mathrm{f})$$

$$\frac{\delta W}{\delta \zeta^n(x)} = \mu_n(x),\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \mu_n(x)} = -\zeta^n(x) \qquad (7\text{-}15\text{-}26\text{g})$$

这样,(7-15-24)式又可化为

$$J_\sigma^0 + \mathrm{i}F_\sigma + \mathrm{i}\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta B_\mu^\sigma} - \mathrm{i}f_{\sigma c}^a B_\mu^c \frac{\delta \Gamma}{\delta B_\mu^a} - \mathrm{i}\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} T_\sigma \psi +$$

$$\mathrm{i}\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\psi}} T_\sigma \overline{\psi} - \mathrm{i}C^a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta \Gamma}{\delta C^b} + \mathrm{i}\overline{C}^a (T_\sigma)_a^b \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{C}^b} -$$

$$\mathrm{i}\partial^\mu \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{C}^a} \frac{1}{\Box} \right) (T_\sigma)_a^b \overline{C}^b \right] = 0 \qquad (7\text{-}15\text{-}27)$$

将(7-15-27)式关于 $\overline{C}^k(x_2)$ 和 $C^m(x_3)$ 求泛函微商,然后让所有场(包括乘子场)为0,即 $B_\mu^a = \psi = \overline{\psi} = C^a = \overline{C}^a = \lambda_m = \mu_n = 0$,于是得[54]

$$\partial_{x_1}^\mu \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \overline{C}^k(x_2) \delta C^m(x_3) \delta B_\mu^\sigma(x_1)} + (T_\sigma)_b^m \delta(x_1 - x_3) \cdot$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \overline{C}^k(x_2) \delta C^b(x_1)} - (T_\sigma)_k^b \delta(x_1 - x_2) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \overline{C}^b(x_1) \delta C^m(x_3)} +$$

$$\partial^\mu \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \overline{C}^a(x_1) \delta C^m(x_3)} \frac{1}{\Box} \right) (T_\sigma)_a^k \delta(x_1 - x_2) \right] = 0$$

$$(7\text{-}15\text{-}28)$$

(7-15-28)式为(7-15-21)式变换下广义 QCD 相应的规范场-鬼场正规顶角的 Ward 恒等式,将(7-15-27)式关于其他场求泛函微商,然后让场变量等于0,可得到场的传播子和正规顶角间更多的关系式.

(7-15-28)式与传统的 BRS 不变性导致的结果不同,BRS 变换中关于鬼场的变换是非线性的,这里在变换(7-15-21)式中关于鬼场的变换则是线性的(非定域). BRS 变换保证了有效 Lagrange 量不变. 这里的变换仅保证了 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 的不变性,而 $\mathscr{L}_{\mathrm{f}}$ 可以是非不变的. 导出规范场-鬼场正规顶角 Ward 恒等式(7-15-28)式时,勿需作出对动量的积分,这也是和传统研究不同的另一突出优点.

§ 7-16　广义 QCD 中的 PCAC 和 AVV 顶角

由 Fermi 场 $\psi(x)$ 构成的矢量流、轴矢流、标量流和赝标量流，分别为

$$\left.\begin{aligned}
V^a_\mu(x) &= \overline{\psi}(x)\gamma_\mu T^a\psi(x)\\
A^a_\mu(x) &= \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi(x)\\
S^a(x) &= \overline{\psi}(x)T^a\psi(x)\\
P^a(x) &= \mathrm{i}\overline{\psi}(x)\gamma_5 T^a\psi(x)
\end{aligned}\right\}\tag{7-16-1}$$

引入与这些流相应的外源 $v^\mu_a(x)$、$a^\mu_a(x)$、$s_a(x)$、$p_a(x)$，并构成与(7-15-15)式相应的扩展生成泛函，即

$$\begin{aligned}
Z[J^\mu_a,\overline{J},J,\overline{\xi},\xi,\eta,\zeta,v,a,s,p] = \int &\mathscr{D}B\,\mathscr{D}B_{(1)}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\pi\,\cdot\\
&\mathscr{D}\pi^{(1)}\,\mathscr{D}\pi_\psi\,\mathscr{D}\pi_{\overline{\psi}}\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\,\overline{C}\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}\mu\,\cdot\\
&\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} + J^\mu_a B^a_\mu + \overline{J}\psi + \overline{\psi}J +\right.\\
&\overline{\xi}C + \overline{C}\xi + \eta^m\lambda_m + \zeta^n\mu_n + v^\mu_a V^a_\mu +\\
&\left. a^\mu_a A^a_\mu + s_a S^a + p_a P^a)\right\}
\end{aligned}\tag{7-16-2}$$

在手征变换

$$\left.\begin{aligned}
\psi'(x) &= (1+\mathrm{i}\varepsilon^\sigma(x)\gamma_5 T_\sigma)\psi(x)\\
\pi'_\psi(x) &= \pi_\psi(x)(1-\mathrm{i}\varepsilon^\sigma(x)\gamma_5 T_\sigma)\\
\overline{\psi}'(x) &= \overline{\psi}(x)(1+\mathrm{i}\varepsilon^\sigma(x)\gamma_5 T^\sigma)\\
\pi'_{\overline{\psi}}(x) &= (1-\mathrm{i}\varepsilon^\sigma(x)\gamma_5 T_\sigma)\pi_{\overline{\psi}}(x)
\end{aligned}\right\}\tag{7-16-3}$$

下

$$\delta I^{p} = \delta\int d^4 x \mathscr{L}^{p} =$$

$$\int d^4 x \varepsilon^{\sigma}(x)(\partial^{\mu} A_{\mu}^{\sigma} - 2mP^{\sigma} - f_{bc}^{\sigma} A_{\mu}^{b} B^{c\mu}) \quad (7\text{-}16\text{-}4)$$

式中 $\varepsilon^{\sigma}(x)$ 是四维时空区域边界上为0的无穷小任意函数.(7-16-3)式变换的 Jacobi 行列式为1[57]. 又因为

$$\delta\Phi_3^{(1)} = -\mathrm{i}\varepsilon^{\sigma}(x)\Phi_3^{(1)}\gamma_5 T_{\sigma}$$

其他约束条件在(7-16-3)式变换下不变. 这样由生成泛函(7-16-2)式在(7-16-3)式变换下的不变性,有

$$\int \mathscr{D}B\, \mathscr{D}B_{(1)}\, \mathscr{D}\psi\, \mathscr{D}\bar{\psi}\, \mathscr{D}\pi\, \mathscr{D}\pi^{(1)}\, \mathscr{D}\pi_{\psi}\, \mathscr{D}\pi_{\bar{\psi}}\, \mathscr{D}C\, \mathscr{D}\bar{C}\, \mathscr{D}\lambda\, \mathscr{D}\mu \cdot$$

$$[\partial^{\mu} A_{\mu}^{\sigma} - 2mP^{\sigma} - f_{bc}^{\sigma} A_{\mu}^{b} B^{c\mu} - \mathrm{i}\lambda^3 \Phi_3^{(1)}\gamma_5 T_{\sigma} + \mathrm{i}\bar{J}\gamma_5 T_{\sigma}\psi +$$

$$\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_5 T_{\sigma} J + f_{bc}^{\sigma} v_{\mu}^{b} A^{c\mu} + f_{bc}^{a} a_{\mu}^{b} V^{c\mu} - d_{bc}^{a} s_b P^c + d_{bc}^{a} p^b S^c] \cdot$$

$$\exp\Big\{\mathrm{i}\int d^4 x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{p} + J_a^{\mu} B_{\mu}^{a} + \bar{J}\psi + \bar{\psi}J + \bar{\xi}C +$$

$$\bar{C}\xi + \eta^m\lambda_m + \zeta^n\mu_n + v_a^{\mu} V_{\mu}^{a} + a_a^{\mu} A_{\mu}^{a} +$$

$$s_a S^a + p_a P^a)\Big\} = 0 \quad (7\text{-}16\text{-}5)$$

当所有外源为0时,在约束超曲面上,由(7-16-5)式可得

$$\langle 0|[\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}^{a}(x) - 2m\hat{P}^{a}(x) -$$

$$f_{bc}^{a}\hat{A}_{\mu}^{b}(x)\hat{B}^{c\mu}(x)]|0\rangle = 0 \quad (7\text{-}16\text{-}6)$$

此即广义 QCD 中轴矢流部分守恒(PCAC)的一种表达式. 将(7-16-5)式关于 $v_{\nu}^{b}(y)$、$v_{\lambda}^{c}(z)$求泛函微商,然后让所有的外源为0,则在约束超曲面上,有

$$\langle 0|T^{*}[(\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}^{a}(x) - 2m\hat{P}^{a}(x) -$$

$$f_{de}^{a}\hat{A}_{\mu}^{d}(x)\hat{B}^{e\mu}(x))\hat{V}_{\nu}^{b}(y)\hat{V}_{\lambda}^{c}(z)]|0\rangle =$$

$$\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y) f_{be}^{a}\langle 0|T[\hat{A}_{\nu}^{e}(x)\hat{V}_{\lambda}^{c}(y)|0\rangle +$$

$$\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-z)f^{a}_{ce}\langle 0|T[\hat{A}^{c}_{\lambda}(x)\hat{V}^{b}_{\nu}(y)]|0\rangle \qquad (7\text{-}16\text{-}7)$$

这就是 AVV 顶角的广义 PCAC 关系. 对一阶微商系统相应的问题在文献[57,58]中的讨论忽略了对约束的处理.

§7-17 高阶微商奇异 Lagrange 量系统的整体量子正则对称性质

在奇异 Lagrange 量

$$\mathscr{L}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu},\cdots,\varphi^{\alpha}_{,\mu(N)}),\quad \varphi_{,\mu(m)}=\underbrace{\partial_{\mu}\cdots\partial_{\nu}}_{m}\varphi^{\alpha} \qquad (7\text{-}17\text{-}1)$$

描述的动力系统中，由于 Lagrange 量(7-17-1)式的奇异性，系统的运动被限制在相空间中由约束所决定的超曲面上. 系统 Green 函数的生成泛函可写为[53]

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^{\alpha}_{(s)}\,\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\,\mathscr{D}\lambda_{m}\,\mathscr{D}C_{l}\,\mathscr{D}\overline{C}_{k}\cdot$$
$$\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+J^{(s)}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(s)}+K^{\alpha}_{(s)}\pi^{(s)}_{\alpha})\right] \qquad (7\text{-}17\text{-}2)$$

有效正则作用量

$$I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int\mathrm{d}^{4}x\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int\mathrm{d}^{4}x\Big[\pi^{(s)}_{\alpha}\dot{\varphi}^{\alpha}_{(s)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda_{m}\Phi_{m}+$$
$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^{4}y\overline{C}_{k}(x)\{\Phi_{k}(x),\Phi_{l}(y)\}C_{l}(y)\Big] \qquad (7\text{-}17\text{-}3)$$

式中：$\pi^{(s)}_{\alpha}$ 为 Ostrogradsky 变换所确定的正则动量；$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为正则 Hamilton 量密度；$\Phi=\{\Phi_{m}\}$为所有约束的总体(对第二类约束系统)；或约束和规范条件的总体(对第一类约束系统)，$\{\cdot,\cdot\}$代表场的广义 Poisson 括号；$C_{l}(x)$和 $\overline{C}_{k}(x)$为 Grassmann 变量；$\lambda_{m}(x)$为 Lagrange 乘子场. 为了简化记号，设 $\phi^{\alpha}_{(s)}=(\varphi^{\alpha}_{(s)},\lambda_{m},C_{l},\overline{C}_{k})$，$J^{(s)}_{\alpha}=(J^{(s)}_{\alpha},\zeta_{m},\xi_{k},\overline{\xi}_{l})$，其中 ζ_{m}、ξ_{k}、$\overline{\xi}_{l}$ 分别为 λ_{m}、$\overline{C}_{k}$、C_{l} 相应的外源，这时(7-17-2)式可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^{a}_{(s)}\,\mathscr{D}\pi^{(s)}_{a}\cdot$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+J^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s)}+K^{a}_{(s)}\pi^{(s)}_{a})\right] \quad (7\text{-}17\text{-}4)$$

下面从系统的整体对称性出发，导出系统整体对称下的广义正则 Ward 恒等式和量子守恒律. 考虑增广相空间中的整体对称变换，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned}
&x^{\mu\prime}=x^{\mu}+\Delta x^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon_{\sigma}\tau^{\mu\sigma}(x;\phi^{a}_{(s)},\pi^{(s)}_{a})\\
&\phi^{a\prime}_{(s)}(x')=\phi^{a}_{(s)}(x)+\Delta\phi^{a}_{(s)}(x)=\\
&\qquad\phi^{a}_{(s)}(x)+\varepsilon_{\sigma}\xi^{a\sigma}_{(s)}(x;\phi^{a}_{(s)},\pi^{(s)}_{a})\\
&\pi^{(s)\prime}_{a}(x')=\pi^{(s)}_{a}(x)+\Delta\pi^{(s)}_{a}(x)=\\
&\qquad\pi^{(s)}_{a}(x)+\varepsilon_{\sigma}\eta^{(s)\sigma}_{a}(x;\phi^{a}_{(s)},\pi^{(s)}_{a})
\end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}17\text{-}5)$$

式中：$\varepsilon_{\sigma}(\sigma=1,2,\cdots,r)$为任意无穷小参数；$\tau^{\mu\sigma}$、$\xi^{a\sigma}_{(s)}$、$\eta^{(s)\sigma}_{a}$ 为 x、$\varphi^{a}_{(s)}$、$\pi^{(s)}_{a}$ 的给定函数. 假设有效正则作用量 $I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$在(7-17-5)式变换下不变，且(7-17-5)式变换的 Jacobi 行列式为1. 生成泛函(7-17-4)式在(7-17-5)式变换下不变，于是有

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^{a}_{(s)}\,\mathscr{D}\pi^{(s)}_{a}\Big\{1+\mathrm{i}\varepsilon_{\sigma}\int\mathrm{d}^4x\Big(J^{(s)}_{a}\Big(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_{a}}\Big)+K^{a}_{(s)}\Big(\eta^{(s)\sigma}_{a}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^{a}_{(s)}}\Big)+\partial_{\mu}\Big[\tau^{\mu\sigma}\Big(J^{(s)}_{a}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_{a}}+K^{a}_{(s)}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^{a}_{(s)}}\Big)\Big]\Big)\Big\}_{\substack{\phi^{a}_{(s)}\to-\mathrm{i}\delta/\delta J^{(s)}_{a}\\ \pi^{(s)}_{a}\to-\mathrm{i}\delta/\delta K^{a}_{(s)}}}Z[J,K] \quad (7\text{-}17\text{-}6)$$

从而，得

$$\int\mathrm{d}^4x\Big\{J^{(s)}_{a}\Big(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_{a}}\Big)+K^{a}_{(s)}\Big(\eta^{(s)\sigma}_{a}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^{a}_{(s)}}\Big)+\partial_{\mu}\Big[\tau^{\mu\sigma}\Big(J^{(s)}_{a}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_{a}}+K^{a}_{(s)}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^{a}_{(s)}}\Big)\Big]\Big\}_{\substack{\phi^{a}_{(s)}\to-\mathrm{i}\delta/\delta J^{(s)}_{a}\\ \pi^{(s)}_{a}\to-\mathrm{i}\delta/\delta K^{a}_{(s)}}}Z[J,K]=0$$

(7-17-7)

(7-17-7)式为高阶微商奇异 Lagrange 量系统整体对称下的广义

正则 Ward 恒等式. 对(7-17-7)式关于外源 $J_a^{(0)}$ 多次求泛函微商，然后让外源为0,可得若干 Green 函数间的关系式.

下面推导整体对称下的量子守恒律. 假设系统的有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{P}}$在(7-17-5)式的整体变换下不变. 将该变换定域化，在增广相空间中讨论对应的定域变换：

$$\left.\begin{aligned}
&x^{\mu\prime}=x^{\mu}+\Delta x^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon_{\sigma}(x)\tau^{\mu\sigma}(x;\phi_{(s)}^{a},\pi_{a}^{(s)})\\
&\phi_{(s)}^{a\prime}(x^{\prime})=\phi_{(s)}^{a}(x)+\Delta\phi_{(s)}^{a}(x)=\\
&\qquad\qquad\phi_{(s)}^{a}(x)+\varepsilon_{\sigma}(x)\xi_{(s)}^{a\sigma}(x;\phi_{(s)}^{a},\pi_{a}^{(s)})\\
&\pi_{a}^{(s)\prime}(x^{\prime})=\pi_{a}^{(s)}(x)+\Delta\pi_{a}^{(s)}(x)=\\
&\qquad\qquad\pi_{a}^{(s)}(x)+\varepsilon_{\sigma}(x)\eta_{a}^{(s)\sigma}(x;\phi_{(s)}^{a},\pi_{a}^{(s)})
\end{aligned}\right\}\tag{7-17-8}$$

式中 $\varepsilon^{\sigma}(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，它们的值及其所需的各级微商在时空区域的边界上为0. 在(7-17-8)式变换下，系统的有效正则作用量的改变为

$$\begin{aligned}
\Delta I_{\text{eff}}^{\text{P}}=&\int\mathrm{d}^{4}x\varepsilon_{\sigma}(x)\Big\{\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{P}}}{\delta\phi_{(s)}^{a}}(\xi_{(s)}^{a\sigma}-\phi_{(s),\mu}^{a}\tau^{\mu\sigma})+\\
&\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{P}}}{\delta\pi_{a}^{(s)}}(\eta_{a}^{(s)\sigma}-\pi_{a,\mu}^{(s)}\tau^{\mu\sigma})+\partial_{\mu}[(\pi_{a}^{(s)}\phi_{(s+1)}^{a}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\\
&\mathrm{D}[\pi_{a}^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma}-\phi_{(s),\mu}^{a}\tau^{\mu\sigma})]\Big\}+\int\mathrm{d}^{4}x\{[(\pi_{a}^{(s)}\phi_{(s+1)}^{a}-\\
&\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]\partial_{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x)+\pi_{a}^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma}-\phi_{(s),\mu}^{a}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\varepsilon_{\sigma}(x)\}
\end{aligned}\tag{7-17-9}$$

式中 $\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 由于假设有效正则作用量在整体变换(7-17-5)式下不变，故(7-17-9)式中的第一个积分为0. 根据 $\varepsilon_{\sigma}(x)$ 的边界条件，(7-17-9)式又可写为

$$\begin{aligned}
\Delta I_{\text{eff}}=&\int\mathrm{d}^{4}x\{[(\pi_{a}^{(s)}\phi_{(s+1)}^{a}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]\partial_{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x)+\\
&\pi_{a}^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma}-\phi_{(s),\mu}^{a}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\varepsilon_{\sigma}(x)\}=\\
&-\int\mathrm{d}^{4}x\varepsilon_{\sigma}(x)\{\partial_{\mu}[(\pi_{a}^{(s)}\phi_{(s+1)}^{a}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+
\end{aligned}$$

$$\mathrm{D}[\pi_a^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma} - \phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]\} \qquad (7\text{-}17\text{-}10)$$

将(7-17-8)式变换的 Jacobi 行列式记为$\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]$. 生成泛函

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\phi^a_{(s)}\,\mathscr{D}\pi_a^{(s)} \cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a^{(s)}\phi^a_{(s)} + K^a_{(s)}\pi_a^{(s)})\right\} \qquad (7\text{-}17\text{-}11)$$

在(7-17-8)式变换下的不变性，表明

$$\left.\frac{\delta Z[J,K]}{\delta\varepsilon_\sigma(x)}\right|_{\varepsilon_\sigma(x)=0} = 0 \qquad (7\text{-}17\text{-}12)$$

将(7-17-8)、(7-17-10)式代入(7-17-11)式，并对所得结果关于$\varepsilon_\sigma(x)$求泛函微商，由(7-17-12)式得

$$\int \mathscr{D}\phi^a_{(s)}\,\mathscr{D}\pi_a^{(s)}\{\partial_\mu[(\pi_a^{(s)}\phi^a_{(s+1)} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] +$$
$$\mathrm{D}[\pi_a^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma} - \phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})] - J_0^\sigma - M^\sigma\} -$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a^{(s)}\phi^a_{(s)} + K^a_{(s)}\pi_a^{(s)})\right\} = 0 \qquad (7\text{-}17\text{-}13)$$

式中

$$J_0^\sigma = -\mathrm{i}\left.\frac{\delta\,\bar{J}\,[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon_\sigma(x)}\right|_{\varepsilon_\sigma(x)=0} \qquad (7\text{-}17\text{-}14)$$

$$M^\sigma = J_a^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma} - \phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma}) + K^a_{(s)}(\eta_a^{(s)\sigma} - \pi^{(s)}_{a,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \qquad (7\text{-}17\text{-}15)$$

将(7-17-13)式关于外源 $J_a^{(0)}$ 求 n 次泛函微商，得

$$\int \mathscr{D}\phi^a_{(s)}\,\mathscr{D}\pi_a^{(s)}\Big(\{\partial_\mu[(\pi_a^{(s)}\phi^a_{(s+1)} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] +$$
$$\mathrm{D}[\pi_a^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma} - \phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})] - J_0^\sigma - M^\sigma\} \cdot$$
$$\phi^a(x_1)\phi^a(x_2)\cdots\phi^a(x_n) - \mathrm{i}\sum_j \phi^a(x_1)\phi^a(x_2)\cdots \cdot$$
$$\phi^a(x_{j-1})\phi^a(x_{j+1})\cdots\phi^a(x_n)N^{a\sigma}\delta(x - x_j)\Big) \cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a^{(s)}\phi^a_{(s)} + K^a_{(s)}\pi_a^{(s)})\right\} = 0 \qquad (7\text{-}17\text{-}16)$$

式中

$$N^{a\sigma}=\xi^{a\sigma}_{(0)}-\phi^{a}_{,\mu}\tau^{\mu\sigma} \quad (7\text{-}17\text{-}17)$$

在(7-17-16)中，让所有外源为0，得

$$\begin{aligned}&\langle 0|T^{*}\{\partial_{\mu}[(\pi^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^{a}_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]-\\&J^{\sigma}_{0}\}\phi^{a}(x_{1})\phi^{a}(x_{2})\cdots\phi^{a}(x_{n})|0\rangle=\\&\mathrm{i}\sum_{j}\langle 0|T^{*}\phi^{a}(x_{1})\phi^{a}(x_{2})\cdots\phi^{a}(x_{j-1})\cdot\\&\phi^{a}(x_{j+1})\cdots\phi^{a}(x_{n})N^{a\sigma}|0\rangle\delta(x-x_{j})\end{aligned} \quad (7\text{-}17\text{-}18)$$

式中：$|0\rangle$代表场的基态；T^{*}代表一种特定的编时乘积. 固定 t，并让

$$t_{1},t_{2},\cdots,t_{m}\rightarrow+\infty;\quad t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_{n}\rightarrow-\infty$$

利用约化公式[58]，可将(7-17-18)式化为

$$\begin{aligned}&\langle \text{out},m|\{\partial_{\mu}[(\pi^{(s)}_{a}\phi^{a}_{s+1}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\\&\phi^{a}_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]-J^{\sigma}_{0}\}|n-m,\text{in}\rangle=0\end{aligned} \quad (7\text{-}17\text{-}19)$$

由于 m、n 的任意性，于是有

$$\begin{aligned}&\partial_{\mu}[(\pi^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\\&\mathrm{D}[\pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^{a}_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]=J^{\sigma}_{0}\end{aligned} \quad (7\text{-}17\text{-}20)$$

将(7-17-20)式在四维时空区域积分，假设场在空间区域无穷远处为0，利用三维 Gauss 定理，由(7-17-20)式得

$$\mathrm{D}\int\mathrm{d}^{3}x[\pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^{a}_{(s),k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}]=\int\mathrm{d}^{4}xJ^{\sigma}_{0} \quad (7\text{-}17\text{-}21)$$

其中重复的拉丁字母 k 指标求和由1～3. 这样就得到下列结果：如果高阶微商奇异 Lagrange 量系统的有效正则作用量在增广相空间中整体变换下不变，并且对应的定域变换(7-17-8)式的 Jacobi 行列式为常数时，那么该系统存在的量子守恒量为

$$Q^{\sigma}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x[\pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^{a}_{(s),k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}]$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,r) \quad (7\text{-}17\text{-}22)$$

此结果对理论中无反常时成立.

量子守恒量(7-17-22)式与正则形式 Noether 定理导出的守恒量相对应. 由于约束 Hamilton 系统量子化时，约束带来的量子效应，一般有效 Hamilton 量 $H_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}$ 与正则 Hamilton 量是不同的，这时量子守恒量(7-17-22)式有别于 Noether 荷. 这是由于约束 Hamilton 系统的量子正则方程不同于经典正则方程的缘故. 在约束 Hamilton 的经典理论中，Dirac 曾猜想：所有第一类约束(初级约束和次级约束)均是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换. 这个问题与由扩展 Hamilton 量 H_{E} 给出的广义正则方程是否与 Lagrange 方程等价紧密相关. 长期以来，关于 Dirac 猜想一直存在着不同的争议. 前面已给出反例说明了高阶微商奇异 Lagrange 量系统 Dirac 猜想失效.

在量子理论中，基于生成泛函(7-17-4)式在正则变量 $\phi^a_{(s)}$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 平移变换下的不变性，可以得到量子理论中的高阶微商奇异 Lagrange量系统的广义正则方程，即

$$\dot{\phi}^a_{(s)}=\frac{\delta H_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi_a^{(s)}},\quad \dot{\pi}_a^{(s)}=-\frac{\delta H_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^a_{(s)}} \tag{7-17-23}$$

可见，约束 Hamilton 系统的量子正则方程，既不是由总 Hamilton 量 H_{T} 决定，也不是由扩展 Hamilton 量 H_{E} 决定. 量子水平的(7-17-23)式与经典正则方程不同，因而量子水平的守恒量就不同于经典 Noether 守恒量. 在量子理论中，导出守恒量(7-17-22)式不仅需要系统的有效正则作用量(而不是正则作用量)在整体变换下不变，而且在对应的定域变换(7-17-8)式下其路径(泛函)积分测度也不变. 这与经典理论中守恒量存在的条件是不同的. 可见，经典理论中的对称性和守恒律的联系，在量子理论中一般不再保持.

§ 7-18 高阶微商杨-Mills 场论中的量子守恒律

含高阶微商杨-Mills 场的 Lagrange 量[52]

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}-\frac{1}{4\Lambda^{2}}\mathrm{D}^{a}_{b\mu}F^{b}_{\lambda\nu}\mathrm{D}^{a\mu}_{c}F^{c\lambda\nu} \tag{7-18-1}$$

式中

$$F^{a}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A^{a}_{\nu}-\partial_{\nu}A^{a}_{\mu}+f^{a}_{bc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu} \tag{7-18-2}$$

$$\mathrm{D}^{a}_{b\mu}=\delta^{a}_{b}\partial_{\mu}+f^{a}_{cb}A^{c}_{\mu} \tag{7-18-3}$$

在 Coulomb 规范下,Green 函数的生成泛函为

$$Z[J,\xi,\bar{\xi},\eta]=\int\mathscr{D}A^{a}_{\mu}\,\mathscr{D}A^{a}_{(1)\mu}\,\mathscr{D}\pi^{\mu}_{a}\,\mathscr{D}\pi^{(1)\mu}_{a}\,\mathscr{D}\overline{C}_{a}\,\mathscr{D}C_{a}\,\mathscr{D}\lambda_{m}\cdot$$
$$\delta(\Phi^{G}_{a_1})\,\delta(\Phi^{G}_{a_2})\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}+J^{\mu}_{a}A^{a}_{\mu}+\right.$$
$$\left.\bar{\xi}^{a}C_{a}+\overline{C}^{a}\xi_{a}+\eta^{m}\lambda_{m})\right\} \tag{7-18-4}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}^{\mathrm{P}}+\mathscr{L}_{m}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{7-18-5}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}=\pi^{\mu}_{a}\dot{A}^{a}_{\mu}+\pi^{(1)\mu}_{a}\dot{A}^{a}_{(1)\mu}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}} \tag{7-18-6}$$

$$\mathscr{L}_{m}=\lambda^{a}_{1}\Phi^{(1)}_{a_1}+\lambda^{a}_{2}\Phi^{(2)}_{a} \tag{7-18-7}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=2\overline{C}_{a}\mathrm{D}^{a}_{bi}\partial_{i}C_{b} \tag{7-18-8}$$

$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 是(7-18-1)式相应的正则 Hamilton 量密度;π^{μ}_{a} 和 $\pi^{(1)\mu}_{a}$ 分别为 A^{a}_{μ}、$\dot{A}^{a}_{\mu}=A^{a}_{(1)\mu}$对应的正则共轭动量;$\{\Phi\}$和$\{\Phi^{G}\}$分别为约束条件和规范条件. 在(7-18-4)式中,仅对场量 A^{a}_{μ} 引入了外源 J^{μ}_{a},由于理论的规范无关性,其规范条件 $\Phi^{G}_{ai}\approx 0\,(i=1,2)$ 可用规范条件 $\Phi^{G}_{ai}-p_{ai}(x)\approx 0$ 代替. 其中 $p_{ai}(x)$ 为与规范无关的函数,用 $\exp\left[-\frac{1}{2\alpha_{i}}\int\mathrm{d}^{4}x(p_{ai})^{2}\right]$(式中 α_{i} 为参数)去乘(7-18-4)式,然后关

于 $p_{ai}(x)$做泛函积分，略去无关紧要的因子，得

$$Z[J,\bar{\xi},\xi,\eta]=\int\mathscr{D}A_\mu^a\,\mathscr{D}A_{(1)\mu}^a\,\mathscr{D}\pi_a^\mu\,\mathscr{D}\pi_{(1)a}^\mu\,\mathscr{D}\bar{C}_a\,\mathscr{D}C_a\,\mathscr{D}\lambda_m\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^p+J_a^\mu A_\mu^a+\bar{\xi}C_a+\bar{C}_a\xi_a+\eta^m\lambda_m)\right\} \tag{7-18-9}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\lambda_1^a\Phi_a^{(1)}+\lambda_2^a\Phi_a^{(2)}-\frac{1}{2\alpha_1}(\Phi_{a_1}^G)^2-\frac{1}{2\alpha_2}(\partial^iA_i^a)^2+2\bar{C}_a\mathrm{D}_{bi}^a\partial_iC_b \tag{7-18-10}$$

考虑相空间中的 BRS 变换

$$\delta A_\mu^a=\mathrm{D}_{b\mu}^aC^b\tau,\ \delta A_{(1)\mu}^a=\partial_0(\mathrm{D}_{b\mu}^aC^b\tau) \tag{7-18-11a}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta\pi_a^\mu&=f_{be}^a\pi_e^\mu C^b\tau-f_{be}^a\pi_e^{(1)\mu}\dot{C}^b\tau\\ \delta\pi_a^{(1)\mu}&=-f_{be}^a\pi_e^{(1)\mu}C^b\tau\end{aligned}\right\} \tag{7-18-11b}$$

$$\delta C^a=\frac{\tau}{2}f_{be}^aC^bC^e,\ \delta\bar{C}^a=-\frac{\tau}{\alpha_2}\partial^iA_i^a \tag{7-18-11c}$$

式中 τ 为 Grassmann 参数. 由于高阶微商纯杨-Mills 场的约束 $\Phi_a^{(1)}\approx0$和 $\Phi_a^{(2)}\approx0$均为第一类约束，变换(7-18-11a)式是由第一类约束作为规范生成元所产生的规范变换，它不会离开约束超曲面. 因此，在 BRS 变换(7-18-11)式下，沿着约束(包括规范约束)所确定的超曲面上，系统的有效正则 Lagrange 量(7-18-10)式是不变的，即 $\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}\approx0$. (7-18-11)式变换的 Jacobi 行列式为1. 按(7-17-22)式所得系统的广义 BRS 量子守恒量

$$Q=\int\mathrm{d}^3x(\pi_a^\mu\delta A_\mu^a+\pi_a^{(1)\mu}\delta A_{(1)\mu}^a+\pi_a\delta C^a+\bar{\pi}_a\delta\bar{C}^a) \tag{7-18-12a}$$

式中

$$\pi_a^0=\frac{1}{\Lambda^2}\mathrm{D}_{aj}^b\mathrm{D}_{b0}^eF_e^{j0} \tag{7-18-12b}$$

$$\pi_a^i = \frac{1}{\Lambda^2}(D_a^{bj}D_{bj}^e F_e^{0i} + D_{bj}^a D_{b0}^e F_e^{ij}) - D_{a0}^b \pi_b^{(1)i} + F_a^{0i} \quad (7\text{-}18\text{-}12c)$$

$$\pi_a^{(1)0} = 0 \quad (7\text{-}18\text{-}12d)$$

$$\pi_a^{(1)i} = \frac{1}{\Lambda^2}D_{bj}^a F_b^{ij} \quad (7\text{-}18\text{-}12e)$$

$$\pi_a = -\dot{\bar{C}}^a \quad (7\text{-}18\text{-}12f)$$

$$\bar{\pi}_a = D_{b0}^a C^b \quad (7\text{-}18\text{-}12g)$$

上述形式的显著优点在于勿需作出系统 Green 函数的相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，即可导出相应的结果.

§7-19 高阶微商 Maxwell 非 Abel-Chern-Simons 理论中的量子守恒律

现考虑(1+2)维时空中非 Abel-Chern-Simons 项与旋量场的耦合情况. 高阶微商 Maxwell 非 Abel-Chern-Simons 理论中的 Lagrange量[29]

$$\mathscr{L} = -\frac{c}{4\pi}D_\rho F_{\mu\nu}^a D^\rho F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a + \frac{1}{3}f_{bc}^a A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c) + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (7\text{-}19\text{-}1)$$

式中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (7\text{-}19\text{-}2)$$

D_μ 代表协变微商. 非 Abel-Chern-Simons 项的规范不变性要求常数 $\kappa = n/4\pi$(n 为自然数). Dirac γ-矩阵为 $\gamma^0=\sigma^3, \gamma^1=\mathrm{i}\sigma^1, \gamma^2=\mathrm{i}\sigma^2$ (σ^i 为 Pauli 矩阵). 由 Ostrogradsky 变换，分别对 A_μ^a、$\dot{A}_\mu^a = B_\mu^a$、ψ 和 $\bar{\psi}$ 引入相应的正则动量 P_a^μ、Q_a^μ、$\bar{\pi}$ 和 π，有

$$P^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu} - \partial_\rho\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho B_\mu)} \quad (7\text{-}19\text{-}3)$$

$$Q^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{B}_\mu} \quad (7\text{-}19\text{-}4)$$

$$\bar{\pi}=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} \tag{7-19-5}$$

$$\pi=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} \tag{7-19-6}$$

求出的 $P^{a\mu}$、$Q^{a\mu}$、$\bar{\pi}^a$ 和 π^a 分别为

$$P^{a\mu}=F^{a\mu 0}+\kappa\varepsilon^{0\mu\nu}A_\nu^a-\frac{c}{\pi}\mathrm{D}_i\mathrm{D}^iF^{a\mu 0}-$$

$$\mathrm{D}_0Q^{a\mu}-\frac{c}{\pi}\mathrm{D}_i\mathrm{D}_0F^{a\mu i}+f_{bc}^aA_0^cQ^{b\mu} \tag{7-19-7}$$

$$Q^{a\mu}=\frac{c}{\pi}\mathrm{D}_0F^{a\mu 0} \tag{7-19-8}$$

$$\bar{\pi}^a=\mathrm{i}\bar{\psi}^a\gamma^0 \tag{7-19-9}$$

$$\pi^a=0 \tag{7-19-10}$$

初级约束为

$$\theta^a=\pi^a\approx 0 \tag{7-19-11}$$

$$\bar{\theta}^a=\bar{\pi}^a-\mathrm{i}\bar{\psi}^a\gamma^0\approx 0 \tag{7-19-12}$$

$$\Lambda^{(0)a}=Q^{a0}\approx 0 \tag{7-19-13}$$

总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}}=\int\mathrm{d}^2x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda_{(0)}^a\Lambda_a^{(0)}+\bar{\lambda}_a\theta^a+\bar{\theta}^a\lambda_a) \tag{7-19-14}$$

式中:$\lambda_{(0)}^a$ 为 Bose Lagrange 乘子;λ_a 和 $\bar{\lambda}_a$ 为 Fermi Lagrange 乘子;$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为正则 Hamilton 量,

$$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}=\dot{A}_\mu^aP^{a\mu}+\dot{B}_\mu^aQ^{a\mu}+\dot{\bar{\psi}}\pi+\bar{\pi}\dot{\psi}-\mathscr{L} \tag{7-19-15}$$

正则变量对 $(A_\mu^a,P^{a\mu})$、$(B_\mu^a,Q^{a\mu})$、$(\psi,\bar{\pi})$ 和 $(\bar{\psi},\pi)$ 的基本广义 Poisson 括号与一阶微商理论结果相同. 初级约束的自洽性要求 $\{\theta,H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$ 和 $\{\bar{\theta},H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$,分别给出确定的 Lagrange 乘子 λ^a 和 $\bar{\lambda}^a$ 的方程. 由初级约束 $\Lambda^{(0)a}$ 的自洽性条件得次级约束. 其次级约束为

$$\Lambda^{(1)a} = \{\Lambda^{(0)a}, H_{\mathrm{T}}\} = -P^{a0} + \mathrm{D}_i Q^{ai} \approx 0 \quad (7\text{-}19\text{-}16)$$

由次级约束的自洽性要求，有

$$\overline{\Lambda}^{(2)a} = \{\Lambda^{(1)a}, H_{\mathrm{T}}\} = -\mathrm{D}_i P^{ai} - \kappa\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a - f_{bc}^a B_i^b Q^{ci} - f_{bc}^a A_0^b \mathrm{D}_i Q^{ci} + \mathrm{i} f_{bc}^a \overline{\psi}^b \gamma_0 \psi^c \approx 0 \quad (7\text{-}19\text{-}17)$$

$$\overline{\Lambda}^{(3)a} = \{\overline{\Lambda}^{(2)a}, H_{\mathrm{T}}\} = -f_{bc}^a A_0^b \overline{\Lambda}^{(2)c} \quad (7\text{-}19\text{-}18)$$

可见，$\overline{\Lambda}^{(3)a}$自然是弱等于0，而不导致新的约束. 做约束$\overline{\Lambda}^{(2)a}$、$\theta^a$、$\overline{\theta}^a$的线性组合，给出

$$\Lambda^{(2)a} = f_{bc}^a(\overline{\psi}^b \pi^c + \overline{\pi}^b \psi^c) + \mathrm{D}_i P^{ai} + \kappa\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a + f_{bc}^a B_i^b Q^{ci} + f_{bc}^a A_0^b \mathrm{D}_i Q^{ci} \approx 0 \quad (7\text{-}19\text{-}19)$$

不难验证，(7-19-11)、(7-19-12)式为第二类约束，而(7-19-13)、(7-19-16)、(7-19-19)式为第一类约束. 按约束 Hamilton 系统量子化规则，对每一个第一类约束需选取一规范条件，并将这些规范条件取为[29]

$$\Omega_1^a = B_0^a \approx 0 \quad (7\text{-}19\text{-}20)$$

$$\Omega_2^a = \partial_i B^{ai} \approx 0 \quad (7\text{-}19\text{-}21)$$

$$\Omega_3^a = \partial_i A^{ai} \approx 0 \quad (7\text{-}19\text{-}22)$$

此系统同时含第一类约束和第二类约束，其 Green 函数在相空间中的生成泛函

$$Z[J] = \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}P_a^\mu \mathscr{D}B_\mu^a \mathscr{D}Q_a^\mu \mathscr{D}\overline{\psi} \mathscr{D}\pi \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\overline{\pi}\, \delta(\theta)\delta(\overline{\theta}) \cdot \prod_{k,l} \delta(\Lambda^{(k)})\delta(\Omega_l) \det|\{\Lambda^{(k)}, \Omega_l\}| [\det|\{\theta, \overline{\theta}\}|]^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(\dot{A}_\mu^a P^{a\mu} + \dot{B}_\mu^a Q^{a\mu} + \dot{\overline{\psi}}\pi + \overline{\pi}\dot{\psi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}} + J_{1a}^\mu A_\mu^a + J_{2a}^\mu B_\mu^a + \overline{J}\psi + \overline{\psi}J)\right\} \quad (7\text{-}19\text{-}23)$$

不难验证，$\{\theta, \overline{\theta}\}$与场量无关，可从生成泛函(7-19-23)式中略去. 而

$$[\{\Lambda^{(k)},\Omega_l\}]=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & M^{ab} & B\\ 0 & 0 & M^{ab}\end{bmatrix} \tag{7-19-24}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=[\{\Lambda^{(0)a},\Omega_1^b\}]=[-\delta^{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})] \tag{7-19-25}$$

$$M^{ac}=\{\Lambda^{(2)a},\Omega_3^c\}=(\delta^{ab}\nabla^2-f_{bc}^aA_i^b\partial^i)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7-19-26}$$

$$\boldsymbol{B}=[\{\Lambda^{(2)a},\Omega_2^b\}] \tag{7-19-27}$$

记 $\boldsymbol{M}_c=[M^{ab}]$. 因子 det $\boldsymbol{M}_c\delta(\partial_iA^{ai})$ 可用 det $\boldsymbol{M}_L\delta(\partial_\mu A^{a\mu})$ 代替，而

$$\boldsymbol{M}_L=(\delta^{ac}\partial^\mu\partial_\mu-f_{bc}^aA_\mu^b\partial^\mu)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7-19-28}$$

将(7-19-24)～(7-19-28)式代入(7-19-23)式，其中的行列式用 Grassmann 变量 $C^a(x)$ 和 $\overline{C}^b(y)$ 的积分来表达，由理论的规范无关性，可将规范条件的因子写在指数上. 略去与场量无关的因子，于是生成泛函(7-19-23)式又可写为

$$\begin{aligned}Z[J]=&\int\mathscr{D}A_\mu^a\,\mathscr{D}P_a^\mu\,\mathscr{D}B_\mu^a\,\mathscr{D}Q_a^\mu\,\mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\pi\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\overline{\pi}\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}\overline{\lambda}\,\cdot\\ &\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\overline{C}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_{1a}^\mu A_\mu^a+\right.\\ &\left.J_{2a}^\mu B_\mu^a+\overline{J}\psi+\overline{\psi}J+\overline{J}_{3a}C^a+\overline{C}^aJ_{3a}]\right\}\end{aligned} \tag{7-19-29}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{g}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}+\mathscr{L}_m \tag{7-19-30}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\dot{A}_\mu^aP^{a\mu}+\dot{B}_\mu^aQ^{a\mu}+\dot{\overline{\psi}}\pi+\overline{\pi}\dot{\psi}-\mathscr{H}_c \tag{7-19-31}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{g}}=-\frac{1}{2\alpha_3}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 \tag{7-19-32}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=2\partial^\mu\overline{C}^a\mathrm{D}_{b\mu}^aC^b \tag{7-19-33}$$

$$\mathscr{L}_m=\lambda_i^a\Lambda^{(i)a}+\overline{\lambda}_a\theta^a+\overline{\theta}^a\lambda_a-\frac{1}{2\alpha_j}(\Omega_a^j)^2\quad(j=1,2) \tag{7-19-34}$$

在(7-19-29)式中对鬼场 $C^a(x)$ 和 $\overline{C}^b(x)$ 分别引入了外源 $\overline{J}_{3a}$ 和 J_{3b}.

现考虑相空间中的 BRS 变换

$$\left.\begin{aligned}
&\delta A_a^\mu = -\tau \mathrm{D}_{b\mu}^a C^b,\ \delta P_a^\mu = -\tau f_{bc}^a P_c^\mu C^b + \tau f_{bc}^a Q_c^\mu \dot{C}^b \\
&\delta B_\mu^a = -\tau \partial_0 (\mathrm{D}_{b\mu}^a C^b),\ \delta Q_a^\mu = \tau f_{bc}^a Q_c^\mu C^b \\
&\delta \psi = \mathrm{i}\tau C^b T^b \psi,\ \delta \overline{\pi} = -\mathrm{i}\tau \overline{\pi} C^b T^b \\
&\delta \overline{\psi} = -\mathrm{i}\tau \overline{\psi} C^b T^b,\ \delta \pi = \mathrm{i}\tau C^b T^b \pi \\
&\delta C^a = \frac{1}{2}\tau f_{bc}^a C^b C^c,\ \delta \overline{C} = -\frac{1}{\alpha_3}\tau \partial^\mu A_\mu^a
\end{aligned}\right\} \tag{7-19-35}$$

(7-19-30)式中前三项之和(即 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{g}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$)在(7-19-35)式变换下不变;由第一类约束产生的规范变换仍保持第一类约束不会离开约束决定的超曲面,而第二类约束 $\overline{\theta}$ 和 θ 在(7-19-35)式变换下不变;(7-19-34)式最后一项$\left(\text{即} -\frac{1}{2\alpha_j}(\Omega_a^j)^2\right)$显然在(7-19-35)式变换下也不会离开约束超曲面. 即是说,量子理论中有效正则 Lagrange 量 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 描述的系统在(7-19-35)式变换下是不变的(在约束所确定的超曲面上),且(7-19-35)式变换的 Jacobi 行列式为1. 这样由(7-17-22)式所得系统在量子理论中的 BRS 守恒荷[59]

$$Q = \int \mathrm{d}^2 x (\pi_a^\mu \delta A_\mu^a + Q_a^\mu \delta B_\mu^a + \overline{\pi}\delta\psi + \delta\overline{\psi}\pi + \overline{R}_a \delta C^a + \delta \overline{C}^a R_a)$$

式中 $\overline{R}_a$ 和 R_a 分别为鬼场 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的正则共轭动量.

有效正则 Lagrange 量 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{p}$ 在 (x_1, x_2) 平面内的空间转动下是不变的,且场变换的 Jacobi 行列式为1. 在空间转动变换下, $\tau^{0\sigma}=0$,于是由(7-17-22)式得系统在量子理论中的守恒角动量[59]

$$J = \int \mathrm{d}^2 x \left\{ P_a^\mu \left(x_2 \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x_2} \right) + Q_a^\mu \left(x_2 \frac{\partial B_\mu^a}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial B_\mu^a}{\partial x_2} \right) + \right.$$
$$P_a^\mu \Big(\sum_{12} \Big)_{\mu\nu} A_a^\nu + Q_a^\mu \Big(\sum_{12} \Big)_{\mu\nu} B_a^\nu + \mathrm{i}\overline{\psi}^\rho \gamma^0 S_{12} \psi^\rho +$$

$$\bar{\pi}_a\left(x_2\frac{\partial\psi^a}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\psi^a}{\partial x_2}\right)+\left(x_2\frac{\partial\bar{\psi}^a}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\bar{\psi}^a}{\partial x_2}\right)\pi_a+$$

$$\bar{R}_a\left(x_2\frac{\partial C^a}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial C^a}{\partial x_2}\right)+\left(x_2\frac{\partial\bar{C}^a}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\bar{C}^a}{\partial x_2}\right)R_a\Big\}\quad(7\text{-}19\text{-}36)$$

式中

$$\Big(\sum_{jk}\Big)_{\mu\nu}=g_{j\mu}g_{k\nu}-g_{j\nu}g_{k\mu}$$

$$S_{jk}=\frac{1}{4}[\gamma_j,\ \gamma_k]$$

可见,量子理论中的角动量还必须记入鬼场的贡献.以上的讨论没有考虑重整化效应,对非 Abel Chern-Simons 理论,重整化后 κ 值要产生移动.

导出上述量子守恒律的显著优点在于勿需作出生成泛函中对正则动量的路径积分.

文献[60]对高阶微商非 Abel-Chern-Simons 项与标量场耦合情形也进行了研究.

参 考 文 献

[1] Whitaker E T. Anlytical Dynamics (4th ed). London: Cambridge University,1937

[2] Bopp F. Ann Phys (paris), 1940, 38: 345

[3] Podolsky B. Phys Rev, 1942, 62: 68

[4] Borneas M. Amer J Phys, 1959, 27: 265

[5] Koestler J, Smith J. Amer J Phys, 1965, 33: 140

[6] Rodrigues P. Amer J Phys, 1970, 38: 557

[7] Thielheim K. Proc Phys Soc, 1967, 91: 798

[8] De Souza C, Rodrigues P. J Phys, 1969, A2: 340

[9] Mušicki D. J Phys, 1978, A11: 39

[10] De Leon M, Rodrigues P. Generalized Classical Mechanics and Field

Theory. Amsterdam: North-Holland, 1985
[11] Hayes C. J Math Phys, 1969, 10: 1555
[12] Ryan C. J Math Phys, 1972, 13: 283
[13] Anderson D. J Math Phys, 1973, 14: 934
[14] Kimura T. Lett Nuovo Cimento, 1972, 5: 81
[15] Tapia V. Nuovo Cimento, 1985, B90: 15
[16] Galvao C, Lemos N. J Math Phys, 1988, 20: 1588
[17] Nesterenko V. J Phys, 1989, A22: 1673
[18] Batle C, Gomis J, Pons J, et al. J Phys, 1988, A21: 2693
[19] Saito Y, Sugano R, Ohta T, et al. J Math Phys, 1989, 30: 1122
[20] Galvao C, Pimentel B. Can J Phys, 1988, 66: 460
[21] Nesterenko V, Suan Nan N. Int J Mod Phys, 1988, 3: 2315
[22] Jaén X, Llosa J, Molina A. Phys Rev, 1986, D34: 2302
[23] Uliyama R, Dewitt B S. J Math Phys, 1962, 3: 608
[24] Stelle K S Phys Rev, 1977, D16: 953
[25] Fradkin E S. Tseytlin A A. Nucl Phys, 1982, B204: 469
[26] Kentwell G W. J Math Phys, 1988, 28: 146
[27] Kersten P H M. Phys Lett, 1988, A134: 25
[28] Hawking S W. Quantum Field Theory and Quantum Statistics. Vol. 2
[29] Foussats A, Manavella E, Repetto C, et al. Int J Theor Phys, 1995, 34: 1037
[30] Anderson D. J Phys, 1973, A6: 299
[31] 李子平. 物理学报, 1984, 33: 814
[32] Li Z P (李子平), Xie Y C. Commun Theor Phys, 1994, 21: 247
[33] Li Z P (李子平). J Phys, 1991, A24: 4261
[34] Benavent F, Gomis J. Ann Phys (N Y), 1979, 118: 476
[35] Dominic D, Gomis J. J Math Phys, 1980, 21: 2124
[36] Gantmacher F. Lecture in Anlytical Mechanics. Moscow: Mir, 1970
[37] Dirac P A M. Lecture on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva University, 1964
[38] Cabo A. J Phys, 1986, A19: 629

[39] Li Z P (李子平). Europhys Lett, 1993, 21: 141
[40] Li Z P (李子平). Phys Rev, 1994, E50: 876
[41] Gogilidze S A, Sanadze V V, Tkebuchava F G, et al. J Phys 1994, A27: 6509
[42] Wang A M, Ruan T N. Phys Rev, 1996, A54: 57
[43] Wu B C. Int J Theor Phys, 1994, 33: 1557
[44] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993
[45] Li Z P. Int J Theor Phys, 1995, 34: 1945
[46] 李子平. 中国科学, 1992, 22: 977
[47] Li Z P (李子平). Int J Theor Phys, 1987, 26: 853
[48] 李子平. 高能物理与核物理, 1988, 12: 782
[49] Li Z P (李子平). Int J Theor Phys, 1994, 33: 1207
[50] Li Z P (李子平), Li X. Int J Theor Phys, 1990, 29: 765
[51] Slavnov A A. Nucl Phys, 1971, B31: 301
[52] Gitman D M, Tyutin I V. Quantization of Fields With Constraints. Berlin: Springer-Verlag, 1990
[53] Li Z P (李子平). Europhys Lett, 1994, 27: 563
[54] 李子平. 高能物理与核物理, 1995, 19: 405
[55] 李子平. 物理学报, 1996, 45: 1255
[56] Li Z P (李子平). Commun Theor Phys, 1997, 27: 381
[57] Suura H, Young B L. Phys Rev, 1973, D8: 4353
[58] Young B L. Introduction to Quantum Field Theories. Beijing: Science Press, 1987
[59] Li Z P (李子平), Bao J. Europhys Lett, 1997, 39: 599
[60] Li Z P (李子平), Long Z W. J Phys, 1999, A32: 6391

[General Information]
书名=北京市自然科学基金资助　　约束哈密顿系统及其对称性质
作者=李子平
页数=392
SS号=10201470
出版日期=1999年11月第1版